

# MATEMATIKA 2 za Tehniško varnost

Naloge z rešitvami\*

Darja Govekar Leban  
Fakulteta za matematiko in fiziko  
Univerza v Ljubljani

Ljubljana, 2023

---

\*Tehniška varnost, Fakulteta za kemijo in kemijsko tehnologijo, Univerza v Ljubljani

<i>KAZALO</i>	2
---------------	---

## **Kazalo**

<b>1 Taylorjeva vrsta</b>	<b>3</b>
<b>2 Diferencialne enačbe prvega reda</b>	<b>11</b>
<b>3 Diferencialne enačbe višjega reda</b>	<b>29</b>
3.1 Znižanje reda diferencialne enačbe . . . . .	29
3.2 Linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti . . .	33
3.3 Homogena Eulerjeva diferencialna enačba . . . . .	50
<b>4 Sistemi linearnih diferencialnih enačb</b>	<b>51</b>
<b>5 Vektorji</b>	<b>57</b>
<b>6 Matrike, determinante, sistemi linearnih enačb</b>	<b>82</b>
<b>7 Lastne vrednosti in lastni vektorji</b>	<b>103</b>

## 1 Taylorjeva vrsta

Za razvoj funkcije  $f$  v Taylorjevo vrsto v okolici dane točke  $a$  moramo izračunati vrednosti vseh odvodov funkcije  $f$  v tej točki  $a$ . Razvoj funkcije  $f$  v Taylorjevo vrsto okoli točke  $a$  je

$$f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \cdots$$

Za katere  $x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  ta vrsta konvergira in je njena vsota enaka  $f(x)$  je potrebno dodatno raziskati. Taylorjev polinom reda  $n$  za funkcijo  $f(x)$  v točki  $a$  imenujemo naslednji polinom

$$T_n(x, a) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Graf funkcije  $f$  v okolici točke  $a$  aproksimiramo s Taylorjevimi polinomi reda  $n$  v točki  $a$ . Kako dobre so te aproksimacije, moramo zopet dodatno raziskati. Razlika med  $f(x)$  in  $T_n(x, a)$  je

$$f(x) - T_n(x, a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1},$$

za neko točko  $c$ , ki leži med  $x$  in  $a$  (t. j.  $x \leq c \leq a$  ali  $a \leq c \leq x$ .) V splošnem je računanje odvodov težko in zamudno, včasih si lahko pri razvoju funkcije  $f$  v Taylorjevo vrsto pomagamo tako, da funkcijo  $f$  zapišemo kot vsoto ali produkt funkcij, katerih Taylorjeve vrste že poznamo.

1. Izračunaj Taylorjeve polinome:

(a) reda 2 funkcije  $f(x) = x^3 - 2x + 2$  okoli točke  $a = 0$ ,

(b) reda 2 funkcije  $f(x) = x^3 - 2x + 2$  okoli točke  $a = 1$ .

(a) Za funkcijo  $f(x) = x^3 - 2x + 2$  velja

$$f'(x) = 3x^2 - 2,$$

$$f''(x) = 6x,$$

Od tod dobimo,  $f(0) = 2$ ,  $f'(0) = -2$ ,  $f''(0) = 0$ , od koder dobimo

$$T_2(x, 0) = 2 - 2x.$$

(b) Za funkcijo  $f(x) = x^3 - 2x + 2$  velja

$$f'(x) = 3x^2 - 2,$$

$$f''(x) = 6x,$$

Od tod dobimo,  $f(1) = 1, f'(1) = 1, f''(1) = 6$ , od koder sledi

$$T_2(x, 1) = 1 + (x - 1) + 3(x - 1)^2.$$

2. Izračunaj Taylorjeve polinome:

(a) reda 2 funkcije  $f(x) = x \ln^2 x$  okoli točke  $a = 1$ ,

(b) reda 2 funkcije  $g(x) = x^2 \ln^2 x$  okoli točke  $a = 1$ ,

(c) reda 4 funkcije  $f(x) = xe^{-x^2}$  v okolici točke  $a = 0$ ,

(d) reda 3 funkcije  $f(x) = e^{\sin x}$  v okolici točke  $a = 0$ ,

(e) reda 2 funkcije  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  okoli točke  $a = 8$ .

**Rešitev:**

Zapišimo Taylorjev polinom reda  $n$  za funkcijo  $f(x)$  v točki  $a$ , to je,

$$T_n(x, a) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

(a) Za funkcijo  $f(x) = x \ln^2 x$  velja:

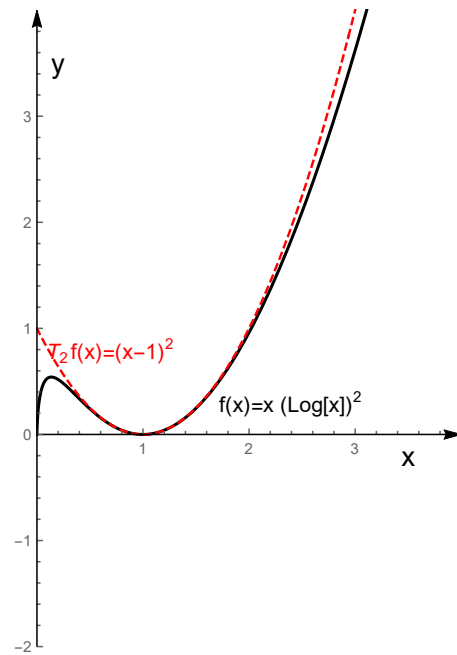
$$f'(x) = \ln^2 x + 2 \ln x,$$

$$f''(x) = \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{x},$$

Od tod dobimo,  $f(1) = 0, f'(1) = 0, f''(1) = 2$ , od koder dobimo

$$T_2(x, 1) = \frac{2(x - 1)^2}{2!} = (x - 1)^2.$$

Taylorjev polinom  $T_2$  precej dobro aproksimira funkcijo  $f$  v okolici točke  $a = 1$ . Iz skice vidimo, da je aproksimacija dobra za  $|x| < \frac{1}{2}$ .



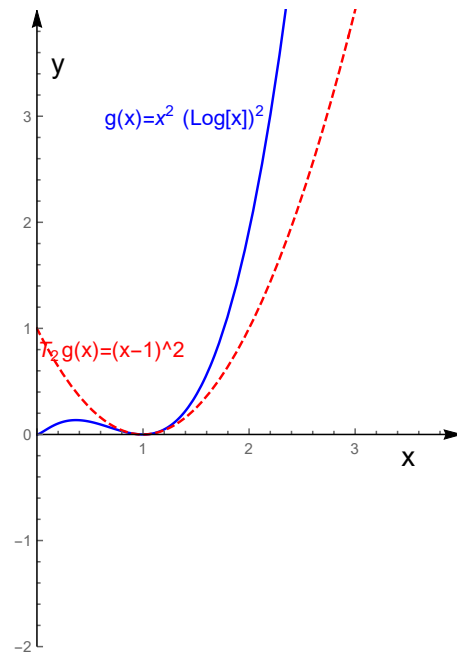
(b) Za funkcijo  $g(x) = x^2 \ln^2 x$  velja:

$$g f'(x) = 2x \ln^2 x + 2x \ln x,$$

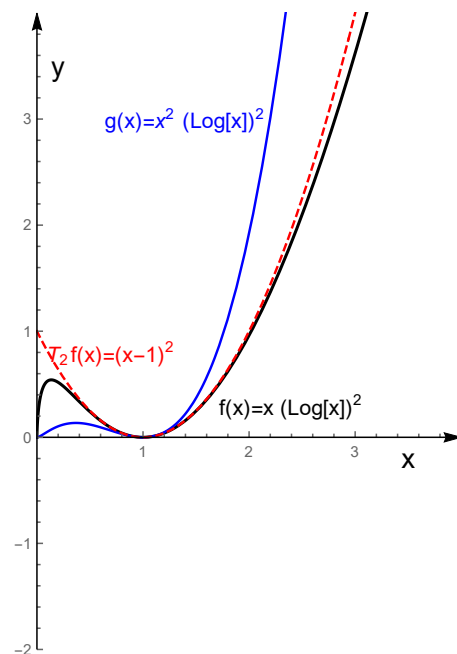
$$g''(x) = 2 + 6 \ln x + 2 \ln^2 x,$$

Od tod dobimo,  $g(1) = 0$ ,  $g'(1) = 0$ ,  $g''(1) = 2$ , od koder sledi

$$T_2(x, 1) = \frac{2(x-1)^2}{2!} = (x-1)^2.$$



Opomba: Različni funkciji v točkah (a) in (b) imata enak Taylorjev polinom reda 2 okoli točke  $a = 1$ . Na naslednji sliki lahko primerjamo aproksimacijo dveh različnih funkcij, ki imata isti Taylorjev polinom  $T_2(x, 1)$ .



(c) Zapišimo sedaj še Taylorjev polinom reda 4 funkcije  $f(x) = xe^{-x^2}$

v okolici točke  $a = 0$ .

$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2},$$

$$f''(x) = (-6x + 4x^3)e^{-x^2},$$

$$f^{(3)}(x) = (-6 + 24x^2 - 8x^4)e^{-x^2},$$

$$f^{(4)}(x) = -4x(15 - 20x^2 + 4x^4)e^{-x^2}.$$

$f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f''(0) = 0$ ,  $f^{(3)}(0) = -6$  in  $f^{(4)}(0) = 0$ , od koder sledi

$$T_4f(x, 0) = x - x^3.$$

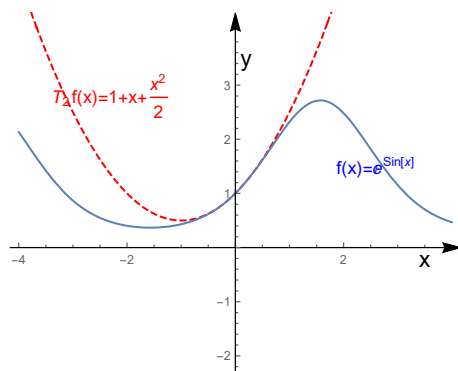
- (d) Zapišimo sedaj še Taylorjev polinom reda 2 funkcije  $f(x) = e^{\sin x}$  v okolici točke  $a = 0$ .

$$f'(x) = e^{\sin x} \cos x,$$

$$f''(x) = e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x),$$

$$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1.$$

$$T_3f(x, 0) = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$



Taylorjev polinom  $T_2$  precej dobro aproksimira funkcijo  $f$  v okolici točke  $a = 0$ .

- (e) Zapišimo sedaj še Taylorjev polinom reda 2 funkcije  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  v okolici točke  $a = 8$ .

**Rešitev:**

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}},$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x} = x^{-\frac{2}{3}},$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}\sqrt[3]{x} = x^{-\frac{5}{3}}.$$

Torej  $f(8) = 2$ ,  $f'(8) = \frac{1}{12}$ ,  $f''(8) = -\frac{1}{144}$ . Taylorjev polinom reda 2 je

$$T_2(x, 8) = 2 + \frac{f'(8)}{1!}(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2 = 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{144 \cdot 2!}(x-8)^2.$$

(a) Funkcijo

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

razvij v Taylorjevo vrsto okrog točke  $a = 0$  in izračunaj

$$f^{(99)}(0).$$

Nasvet: Uporabi naslednji razvoj okrog točke  $a = 0$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots,$$

ki absolutno konvergira za vse  $x$ , za katere velja  $|x| < 1$ .

**Rešitev:** Razcepimo funkcijo  $f$  na parcialne ulomke.

$$f(x) = -\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{x-2},$$

kjer velja

$$-\frac{1}{(x-1)} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

in ta vrsta konvergira za vse  $x$ ,  $|x| < 1$ . Nadalje je

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-2)} &= \frac{1}{2\frac{x}{2}-1} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{2}\right)^n + \dots \right) = \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{2^2} - \frac{x^2}{2^3} - \dots - \frac{x^n}{2^{n+1}} - \dots \end{aligned}$$

in ta vrsta konvergira za vse  $x$ ,  $|\frac{x}{2}| < 1$ . Od tod sledi

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2} + x \left( 1 - \frac{1}{2^2} \right) + \dots + x^n \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) + \dots$$

in ta vrsta konvergira za vse  $x$ ,  $|x| < 1$ . iz enakosti

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots,$$



sledi

$$\frac{f^{(99)}(0)}{99!} = 1 - \frac{1}{2^{100}}.$$

Torej

$$f^{(99)}(0) = 99! \left(1 - \frac{1}{2^{100}}\right).$$

(b) Funkcijo

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

razvij v Taylorjevo vrsto okrog točke  $a = 1$  in zapiši Taylorjev polinom reda 2 okrog točke  $a = 1$  ter določi  $f^{(10)}(1)$ .

Nasvet: Uporabi naslednji razvoj okrog točke  $a = 0$   $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ , ki absolutno konvergira za vse  $x$ , za katere velja  $|x| < 1$ .

**Rešitev:** Taylorjeva vrsta okrog točke  $a = 1$  vsebuje potence  $(x-1)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+1+(x-1)} = \frac{1}{2+(x-1)} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+\frac{(x-1)}{2}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-\left(-\frac{(x-1)}{2}\right)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \left(-\frac{(x-1)}{2}\right) + \left(-\frac{(x-1)}{2}\right)^2 + \left(-\frac{(x-1)}{2}\right)^3 + \dots + \left(-\frac{(x-1)}{2}\right)^n + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 - \dots + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}}(x-1)^n + \dots \end{aligned}$$

Vrsta konvergira za vse  $x$ , za katere velja  $|\frac{x-1}{2}| < 1$  oziroma, za vse  $x \in (-1, 3)$ .

Zapišimo še Taylorjev polinom reda 2 okrog točke  $a = 1$ .

$$T_2(x, 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2.$$

iz enakosti

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + \dots,$$

sledi

$$\frac{f^{(10)}(0)}{10!} = (-1)^1 0 \frac{1}{2^{11}},$$

torej

$$f^{(10)}(0) = 10! \frac{1}{2^{11}}.$$

(c) Funkcijo

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

razvij v Taylorjevo vrsto okrog točke  $a = 0$ .

**Rešitev:** Uporabimo

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + \dots + (-x)^n + \dots, \quad |x| < 1.$$

Nadomestimo  $x$  z  $x^2$  in dobimo

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots,$$

ki konvergira, za vse  $x$  za katere velja  $|x^2| < 1$ , slednje pa velja za vse  $x$ ,  $|x| < 1$

## 2 Diferencialne enačbe prvega reda

1. Pokaži, da družina funkcij

$$y(x) = \frac{1 + ce^x}{1 - ce^x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

zadošča diferencialni enačbi

$$y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1).$$

2. Dana je diferencialna enačba

$$y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1).$$

(a) Poišči splošno rešitev.

(b) Poišči tisto rešitev, ki zadošča pogoju  $y(0) = 2$ .

**Rešitev:**

(a) Ločimo spremenljivke

$$\frac{2 \, dy}{(y^2 - 1)} = dx,$$

$$\int \frac{2 \, dy}{(y^2 - 1)} = \int dx,$$

$$2 \int \left( \frac{1}{2} \frac{1}{y-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{y+1} \right) dy = \int dx,$$

$$\ln |y-1| - \ln |y+1| = x + D,$$

$$\ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = x + D,$$

$$\left| \frac{y-1}{y+1} \right| = e^x e^D,$$

$$\frac{y-1}{y+1} = E e^x,$$

$$y-1 = E e^x (y+1),$$

$$y = \frac{1 + E e^x}{1 - E e^x}, \quad E \in \mathbb{R}.$$

- (b) V splošni rešitvi je potrebno določiti konstanto  $E$ , tako, da bo izpolnjen pogoj  $y(0) = 2$ . Vstavimo pogoj v splošno rešitev

$$y(x) = \frac{1 + Ee^x}{1 - Ee^x}.$$

$$y(0) = \frac{1 + Ee^0}{1 - Ee^0} = \frac{1 + E}{1 - E}.$$

Od tod dobimo

$$2(1 - E) = 1 + E,$$

$$E = \frac{1}{3}.$$

Rešitev, ki zadošča pogoju  $y(0) = 2$  je

$$y(x) = \frac{1 + \frac{1}{3}e^x}{1 - \frac{1}{3}e^x}.$$

3. Dana je družina funkcij

$$y(x) = (x - C)^3.$$

Poiči diferencialno enačbo, ki ji zadošča ta družina.

**Rešitev:** Iz enakosti  $y(x) = (x - C)^3$  izrazimo konstanto  $C$ . Odvajamo dano enačbo

$$y(x) = (x - C)^3$$

in dobimo

$$y'(x) = 3(x - C)^2,$$

nadalje izrazimo konstanto  $C$

$$C = x - y^{\frac{1}{3}}(x)$$

in vstavimo v enačbo, ki smo jo dobili z odvajanjem. Torej

$$y'(x) = 3(x - C)^2 = 3\left(x - x + y^{\frac{1}{3}}(x)\right)^2.$$

Diferencialna enačba je

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}.$$

Opomba: Poleg družine funkcij  $y(x) = (x - C)^3$ , ki je splošna rešitev, ima diferencialna enačba tudi še druge rešitve, npr.  $y \equiv 0$ .

4. Dana je diferencialna enačba

$$y' = \frac{y \cos x}{1 + y^2}.$$

- (a) Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe.  
 (b) Poišči tisto rešitev dane diferencialne enačbe, ki zadošča pogoju  $y(0) = 1$ .

**Rešitev:**

(a)

$$\begin{aligned} \frac{dy(1 + y^2)}{y} &= \cos x \, dx, \\ \int \frac{(1 + y^2)}{y} \, dy &= \int \cos x \, dx, \\ \int \left( \frac{1}{y} + y \right) \, dy &= \int \cos x \, dx, \\ \ln |y(x)| + \frac{(y(x))^2}{2} &= -\sin x + C. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \ln |y(0)| + \frac{(y(0))^2}{2} &= -\sin 0 + C, \\ C &= \frac{1}{2}, \\ \ln |y(x)| + \frac{(y(x))^2}{2} &= -\sin x + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5. Dana je diferencialna enačba

$$y' = \frac{xy}{2 \ln y}.$$

- (a) Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe.  
 (b) Poišči tisto rešitev dane diferencialne enačbe, ki zadošča pogoju  $y(0) = 1$ .

**Rešitev:**

(a)

$$2 \frac{\ln y}{y} \, dy = x \, dx,$$

$$\int 2 \frac{\ln y}{y} dy = \int x dx,$$

$$\ln^2 y(x) = \frac{x^2}{2} + D,$$

kjer smo upoštevali, da velja

$$2 \int \frac{\ln y}{y} = \int 2u du = u^2 + C = (\ln y)^2 + C,$$

$$\ln y = u, \quad \frac{1}{y} dy = du.$$

(b) Vstavimo  $x = 0$  in dobimo

$$(\ln 1)^2 + C = 0,$$

$$C = 0.$$

Rešitev, ki zadošča pogoju  $y(0) = 1$  je

$$(\ln y(x))^2 = \frac{x^2}{2}.$$

6. Model omejene rasti populacije je podan z diferencialno enačbo

$$\frac{dP}{dt} = \frac{8}{100} P \left( 1 - \frac{P}{100} \right),$$

kjer je  $P(t)$  število oseb v času  $t$ , kjer  $t$  merimo v dnevih.

(a) Poišči  $P(t)$  ob pogoju,  $P(0) = 10$ .

(b) Ugotovi v kolikem času bo populacija  $P(t)$  dosegla število 900.

**Rešitev:** Diferencialna enačba za funkcijo  $P(t)$  ima ločljive spremenljivke.

(a) Poiskati moramo tisto rešitev diferencialne enačbe

$$\frac{dP}{dt} = \frac{8}{100} P \left( 1 - P \frac{1}{100} \right),$$

ki zadošča pogoju  $P(0) = 100$ . Najprej moramo poiskati splošno rešitev. Ločimo spremenljivki.

$$\frac{dP}{P} \left( 1 - \frac{1}{100} P \right) = \frac{8}{100} dt,$$

$$\frac{1}{P(1 - \frac{1}{100}P)} dP = \frac{8}{100} dt,$$

$$\frac{100}{P(100 - P)} dP = \frac{8}{100} dt,$$

$$\int \frac{100}{P(100 - P)} dP = \int \frac{8}{100} dt.$$

Razcepimo na delne ulomke

$$\frac{100}{P(100 - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{(100 - P)}.$$

Torej

$$\int \left( \frac{1}{P} + \frac{1}{(100 - P)} \right) dP = \int \frac{8}{100} dt,$$

$$\ln|P| - \ln|100 - P| = \frac{8}{100}t + C,$$

$$\ln \left| \frac{P}{100 - P} \right| = \frac{8}{100}t + C,$$

$$\frac{P}{100 - P} = Ae^{\frac{8}{100}t},$$

$$P = (100 - P) Ae^{\frac{8}{100}t},$$

$$P \cdot \left( 1 + Ae^{\frac{8}{100}t} \right) = 100Ae^{\frac{8}{100}t},$$

$$P = \frac{100Ae^{\frac{8}{100}t}}{1 + Ae^{\frac{8}{100}t}}.$$

Torej splošna rešitev diferencialne enačbe je

$$P(t) = \frac{100Ae^{\frac{8}{100}t}}{1 + Ae^{\frac{8}{100}t}}.$$

Poiskati moramo tisto rešitev  $P(T)$ , ki zadošča pogoju  $P(0) = 100$ . Torej moramo določiti konstanto  $A$  tako, da bo veljalo  $P(0) = 100$ .

$$P(0) = \frac{100Ae^{\frac{8}{100} \cdot 0}}{1 + Ae^{\frac{8}{100} \cdot 0}} = \frac{100A}{1 + A}.$$

$$10 = \frac{100A}{1 + A} \iff A = \frac{1}{9}.$$

Torej rešitev, ki zadošča pogoju  $P(0) = 10$  je

$$P(t) = \frac{\frac{1000}{9}e^{\frac{8}{100}t}}{1 + \frac{1}{9}e^{\frac{8}{100}t}} = \frac{1000e^{\frac{8}{100}t}}{9 + e^{\frac{8}{100}t}}.$$

(b) Poiščimo čas  $t$ , da bo veljalo

$$P(t) = \frac{1000e^{\frac{8}{100}t}}{9 + e^{\frac{8}{100}t}} = 900.$$

$$1000e^{\frac{8}{100}t} = 8100 + 900e^{\frac{8}{100}t},$$

$$100e^{\frac{8}{100}t} = 8100,$$

$$\frac{8}{100}t = \ln 81,$$

$$t = \frac{100}{8} \ln 81.$$

**Linearna diferencialna enačba** je diferencialna enačba oblike

$$y' + f(x)y = d(x).$$

V primeru, ko je  $d(x) \equiv 0$ , diferencialno enačbo imenujemo homogena linearna diferencialna enačba. Splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe je oblike

$$y(y) = y_p(x) + y_h(x),$$

kjer je  $y_p$  ena rešitev nehomogene diferencialne enačbe,  $y_h$  pa je splošna rešitev homogene diferencialne enačbe. Rešimo jo v dveh korakih:

- Rešimo homogeno diferencialno enačbo

$$y' + f(x)y = 0,$$

ki ima ločljive spremenljivke in poiščemo splošno rešitev  $y_h(x)$ .

- Poiščemo partikularno rešitev, bodisi z ugibanjem, bodisi z metodo variacije konstant. Iskanje rešitve s pomočjo variacije konstant pomeni, da iščemo rešitev nehomogene diferencialne enačbe v obliki nastavka  $y(x) = h(x)A(x)$ , kjer je  $y_h(x) = h(x)A$  splošna rešitev homogene diferencialne enačbe, ki jo poiščemo na prvem koraku.

7. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y' + 3x^2y = 6x^2.$$



**Rešitev:** Dana diferencialna enačba je linearna. Najprej rešimo homogeni del.

$$y' + 3x^2y = 0,$$

$$y' = -3x^2y,$$

$$\frac{y'}{y} = -3x^2,$$

Diferencialno enačbo rešujemo dalje pri pogoju  $y \neq 0$ .

$$\ln |y| = -x^3 + C,$$

$$|y| = e^{-x^3+C},$$

$$y = \pm e^{-x^3} e^C,$$

$$y = Ae^{-x^3},$$

kjer je

$$A = \pm e^C,$$

hkrati pa je tudi konstantna funkcija  $y \equiv 0$  rešitev homogene diferencialne enačbe, tako velja

$$A = \pm e^C, \quad \text{ali } A = 0,$$

kar je ekvivalentno

$$A \in \mathbb{R}.$$

Dobili smo splošno rešitev homogene diferencialne enačbe,  $y_h(x) = Ae^{-x^3}$ . Splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe je  $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$ , kjer je  $y_p$  ena rešitev nehomogene diferencialne enačbe. Rešitev  $y_p$  imenujemo partikularna rešitev. Poičimo še partikularno rešitev nehomogene diferencialne enačbe.

1. način: Partikularno rešitev uganemo:  $y_p = 2$  je rešitev. Splošna rešitev je

$$y = 2 + Ae^{-x^3}.$$

2. način: Partikularno rešitev poiščemo z variacijo konstant: Rešitev  $y = y_p$  iščemo v obliki nastavka

$$y(x) = A(x)e^{-x^3},$$

$$y'(x) = A'(x)e^{-x^3} + A(x)e^{-x^3}(-3x^2),$$

Vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo

$$A'(x)e^{-x^3} = 6x^2,$$

$$A'(x) = 6x^2e^{x^3},$$

$$A(x) = \int 6x^2e^{x^3} dx = 2e^{x^3} + C,$$

$$y(x) = A(x)e^{-x^3} = (2x^3 + C)e^{-x^3} = 2 + Ce^{-x^3}.$$

Vsaki izbiri realnega števila  $C$  ustreza ena partikularna rešitev. Izberemo lahko npr.  $C = 0$  in dobimo  $y_p = 2$ . Splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe torej je

$$y(x) = 2 + Ce^{-x^3}.$$

8. Dana je diferencialna enačba

$$xy' + 2y = x^2.$$

- Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe.
- Poišči tisto rešitev dane diferencialne enačbe, ki zadošča pogoju  $y(1) = 2$ .

**Rešitev:**

- Dana diferencialna enačba je linearna in nehomogena. Rešimo najprej homogeni del:

$$xy' + 2y = 0$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2}{x},$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{2}{x} dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{2}{x} dx,$$

$$\ln|y| = -2\ln|x| + C,$$

$$|y| = \ln|x|^{-2} e^C,$$

$$y = Ax^{-2} = \frac{A}{x^2},$$

To je splošna rešitev homogene diferencialne enačbe. Poiščimo še partikularno rešitev nehomogene diferencialne enačbe z variacijo konstant.

$$y(x) = \frac{A(x)}{x^2},$$

$$y'(x) = \frac{A'(x)}{x^2} - \frac{2A(x)}{x^3}.$$

Vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo

$$\frac{A'(x)}{x} = x^2,$$

$$A'(x) = x^3,$$

$$A(x) = \frac{x^4}{4} + C,$$

$$y(x) = \frac{A(x)}{x^2} = \left(\frac{x^4}{4} + C\right) \frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}.$$

To je splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe.

- (b) Da dobimo rešitev, ki zadošča pogoju  $y(1) = 2$ , vstavimo  $x = 1$  in  $y(1) = 2$  v splošno rešitev in določimo konstanto  $C$ .

$$y(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2},$$

$$y(1) = \frac{1}{4} + C,$$

$$C = \frac{7}{4}.$$

Iskana rešitev je

$$y(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{7}{4} \frac{1}{x^2}.$$

9. Poišči vse krivulje z lastnostjo, da je za vsako njeno tangento konstantna ploščina trapeza, omejenega s koordinatnima osema, tangento in tisto vzporednico z osjo  $x$ , ki gre skozi dotikališče.

**Rešitev:**

Naj bo  $y = f(x)$  enačba krivulje, kjer je  $f$  odvedljiva funkcija. Naj bo  $(x_0, f(x_0))$  poljubna točka na grafu funkcije  $f$ . Enačba tangente na graf funkcije  $f$  v točki  $(x_0, f(x_0))$  je

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Označimo z  $n$  odsek tangente na ordinatni osi, kar pomeni, da tangenta seka  $y$  os v točki  $(0, n)$ . Velja  $n = y_0 - f'(x_0)x_0$ . Dolžina osnovne stranice trapeza je enaka  $n$ , dolžina njej vzporedne stranice pa je enaka  $f(x_0)$ , višina trapeza je  $x_0$ . Ploščina trapeza je

$$pl = \frac{x_0}{2} \frac{(n + y_0)}{2} = \frac{x_0}{2} (y_0 - f'(x_0)x_0 + y_0).$$

V poljubni točki  $(x, y(x))$  na grafu funkcije  $y = y(x)$  je ploščina enaka konstanti  $P$ , to je, velja naslednja enačba

$$P = \frac{x}{2} (y(x) - y'(x)x + y) = \frac{x}{2} (2y(x) - y'(x)x),$$

ali krajše zapisano

$$P = \frac{x}{2} (2y - xy').$$

Torej, poiskati moramo splošno rešitev linearne nehomogene diferencialne enačbe

$$2xy - x^2y' = 2P.$$

Rešimo najprej homogeni del:

$$2xy - x^2y' = 0,$$

$$2xy = x^2y',$$

$$\frac{2 dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

$$2 \ln|x| = \ln|y| + C,$$

$$\ln|x|^2 = \ln|y| + C,$$

$$|y| = e^C |x|^2,$$

$$y_h(x) = Ax^2, \quad A \in \mathbb{R}.$$

To je splošna rešitev diferencialne enačbe. Da bi poiskali splošno rešitev nehomogene diferencialne enačbe nadaljujemo z variacijo konstant. Vpeljemo nastavek

$$y(x) = A(x)x^2.$$

$$y'(x) = A'(x)x^2 + 2A(x)x.$$

Nastavek vstavimo v nehomogeno diferencialno enačbo

$$2xy - x^2y' = 2P.$$

Dobimo

$$A'(x) = -\frac{2P}{x^4},$$

$$A(x) = -\int \frac{2P}{x^4} dx,$$

$$A(x) = 2P \frac{1}{3} x^{-3} + D.$$

Splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe je

$$y(x) = A(x)x^2 = \frac{2P}{3}x + Dx^2.$$

10. Dana je diferencialna enačba

$$y' - 2xy = 3x^2 e^{x^2}.$$

- (a) Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe.  
 (b) Poišči tisto rešitev dane diferencialne enačbe, ki zadošča pogoju  $y(0) = 5$ .

**Rešitev:**

Diferencialna enačba je linearna. Rešimo najprej homogeno diferencialno enačbo.

(a)

$$y' - 2xy = 0,$$

$$\frac{y'}{y} = 2x,$$

$$\ln|y| = x^2 + C,$$

$$y_h(x) = Ae^{x^2}.$$

Poiščimo še splošno rešitev nehomogene diferencialne enačbe s pomočjo metode variacije konstant. Uporabimo nastavek

$$y(x) = A(x)e^{x^2}.$$

$$y'(x) = A'(x)e^{x^2} + 2xA(x)e^{x^2}.$$

Vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo

$$A'(x) = 3x^2,$$

$$A(x) = \int 3x^2 \, dx,$$

$$A(x) = 3\frac{x^3}{3} + C,$$

$$y_p(x) = x^3 e^{x^2},$$

$$y(x) = Ae^{x^2} + x^3 e^{x^2}.$$

(b)

$$y(0) = A = 5,$$

$$y(x) = 5e^{x^2} + x^3 e^{x^2}.$$

(c)

$$y(0) = A = 5,$$

$$y(x) = 5e^{x^2} + x^3 e^{x^2}.$$

Oglejmo si še reševanje Bernoulijeve diferencialne enačbe.

**Bernoulijeva diferencialna enačba:**

$$y' + f(x)y = g(x)y^n.$$

Delimo diferencialno enačbo z  $y^n$ .

$$y' y^{-n} + f(x)y^{1-n} = g(x),$$

in vpeljemo novo spremenljivko

$$v(x) = y^{1-n}, \quad v' = (1-n)y^{-n}y'.$$

V novi spremenljivki je diferencialna enačba linearna

$$\frac{v'}{1-n} + f(x)v = g(x).$$

11. Pošči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y' + y = xy^2.$$

**Rešitev:** Dana diferencialna enačba je Bernoulijeva diferencialna enačba za  $n = 2$ . Diferencialno enačbo delimo z  $y^2$ .

$$y'y^{-2} + y^{-1} = x,$$

Vpeljemo

$$v = y^{-1}, \quad v' = -y^{-2}y'.$$

V novi spremenljivki  $v$  je diferencialna enačba sledeča linearna diferencialna enačba

$$-v' + v = x. \quad (1)$$

Rešimo najprej homogeni del

$$-v' + v = 0,$$

$$\frac{dv}{v} = dx,$$

$$\ln|v| = x + C,$$

$$v = Ae^x,$$

$$v_h(x) = Ae^x$$

je splošna rešitev homogene diferencialne enačbe. Splošno rešitev nehomogene diferencialne enačbe dobimo z variacijo konstant. Vpeljemo nastavek

$$v(x) = A(x)e^x,$$

$$v'(x) = A'(x)e^x + A(x)e^x,$$

$$-A'(x)e^x - A(x)e^x + A(x)e^x = x,$$

$$-A'(x) = \frac{x}{e^x},$$

$$A'(x) = - \int xe^{-x} dx,$$

$$A(x) = - \int xe^{-x} dx = xe^{-x} + e^{-x} + C,$$

$$v(x) = (e^{-x}(x+1) + C)e^x,$$

Splošna rešitev nehomogene linearne diferencialne enačbe (1) je

$$v(x) = (x+1) + Ce^x.$$

Splošna rešitev Bernoullijeve diferencialne enačbe je

$$y^{-1}(x) = v(x) = x+1 + Ce^{-x},$$

$$y(x) = \frac{1}{x + 1 + Ce^{-x}}.$$

Integral  $\int xe^{-x} dx$  smo izračunali z metodo z metodo per partes.

$$\int xe^{-x} dx = x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) dx + C = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + D,$$

$$u = x, \quad e^{-x} dx = dv,$$

$$du = dx, \quad v = -e^{-x}.$$

12. Pošči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y' + xy = xy^{\frac{1}{2}}.$$

**Rešitev:** Dana diferencialna enačba je Bernoulijeva diferencialna enačba za  $n = \frac{1}{2}$ . Diferencialno enačbo delimo z  $y^{\frac{1}{2}}$ .

$$y'y^{\frac{1}{2}} + xy^{\frac{1}{2}} = x,$$

Vpeljemo

$$v = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}, \quad v' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'.$$

V novi spremenljivki  $v$  je diferencialna enačba sledeča linearna diferencialna enačba

$$2v' + xv = x. \tag{2}$$

Rešimo najprej homogeni del

$$2v' + xv = 0.$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2}x dx,$$

$$\ln|v| = -\frac{1}{4}x^2 + C,$$

$$v = Ae^{-\frac{1}{4}x^2},$$

$$v_h(x) = Ae^{-\frac{1}{4}x^2},$$

je splošna rešitev homogene diferencialne enačbe. Splošno rešitev nehomogene diferencialne enačbe dobimo z variacijo konstant. Vpeljemo nastavek

$$v(x) = A(x)e^{-\frac{1}{4}x^2}.$$



Odvajamo

$$v'(x) = A'(x)e^{-\frac{1}{4}x^2} + A(x)e^{-\frac{1}{4}x^2} \left(-\frac{2}{4}x\right)$$

in vstavimo v nehomogeno diferencialno enačbo

$$2 \left( A'(x)e^{-\frac{1}{4}x^2} + A(x)e^{-\frac{1}{4}x^2} \left(-\frac{2}{4}x\right) \right) + A(x)e^{-\frac{1}{4}x^2} = x$$

in dobimo

$$2A'(x)e^{-\frac{1}{4}x^2} = x,$$

$$A'(x) = \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{4}x^2},$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \int xe^{\frac{1}{4}x^2} dx = e^{\frac{1}{4}x^2} + D.$$

Splošna rešitev nehomogene linearne diferencialne enačbe (2) je

$$v(x) = A(x)e^{-\frac{1}{4}x^2} = \left(e^{\frac{1}{4}x^2} + D\right)e^{-\frac{1}{4}x^2} = 1 + De^{-\frac{1}{4}x^2}.$$

Splošna rešitev Bernoulijeve diferencialne enačbe je

$$y(x) = v^2(x) = \left(1 + De^{-\frac{1}{4}x^2}\right).$$

Integral  $\int xe^{\frac{1}{4}x^2} dx$  smo izračunali s pomočjo vpeljave nove spremenljivke.

$$\int xe^{\frac{1}{4}x^2} dx = 2 \int e^u du = 2e^{\frac{1}{4}x^2} + C,$$

kjer je

$$u = \frac{1}{4}x^2, \quad du = \frac{1}{2}x dx, \quad x dx = 2 du.$$

13.

14. Pošči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y' - y \tan x = y^4 \cos x.$$

**Rešitev:** Dana diferencialna enačba je Bernoulijeva diferencialna enačba za  $n = 4$ . Diferencialno enačbo delimo z  $y^4$ .

$$y'y^{-4} - \tan xy^{-3} = \cos x.$$

Vpeljemo

$$v = y^{1-4} = y^{-3}, \quad v' = -3y^{-4}y'.$$

V novi spremenljivki  $v$  je diferencialna enačba sledeča linearna diferencialna enačba

$$-\frac{1}{3}v' - v \tan x = \cos x. \quad (3)$$

Rešimo najprej homogeni del

$$-\frac{1}{3}v' - v \tan x = 0.$$

$$-\frac{1}{3} \frac{dv}{v} = \tan x \, dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -3 \int \tan x \, dx + C,$$

$$\ln|v| = -3(-\ln|\cos x|) + C,$$

$$\ln|v| = \ln|\cos x|^3 + C,$$

$$v = A \cos^3 x,$$

$$v_h(x) = A \cos^3 x$$

je splošna rešitev homogene diferencialne enačbe. Splošno rešitev nehomogene diferencialne enačbe dobimo z variacijo konstant. Vpeljemo nastavek

$$v(x) = A(x) \cos^3 x.$$

Odvajamo

$$v'(x) = A'(x) \cos^3 x + A(x) 3 \cos^2 x (-\sin x)$$

in vstavimo v nehomogeno diferencialno enačbo

$$-\frac{1}{3} (A'(x) \cos^3 x + A(x) 3 \cos^2 x (-\sin x)) - A(x) \cos^3 x \tan x = \cos x,$$

od koder sledi

$$-\frac{1}{3} A'(x) \cos^3 x = \cos x,$$

$$A'(x) = -\frac{3}{\cos^3 x},$$

$$A(x) = -\int \frac{3}{\cos^2 x} \, dx = -3 \tan x + E.$$

Splošna rešitev nehomogene linearne diferencialne enačbe (3) je

$$v(x) = A(x) \cos^3 x = (-3 \tan x + E) \cos^3 x = -3 \sin x \cos^2 x + E \cos^3 x.$$

Splošna rešitev Bernoulijeve diferencialne enačbe je

$$y^{-3}(x) = -3 \sin x \cos^2 x + E \cos^3 x.$$

oziroma

$$y(x) = \sqrt[3]{-3 \sin x \cos^2 x + E \cos^3 x}.$$

**Vpeljava nove spremenljivke v nekaterih primerih diferencialnih enačb:**

- V primeru, ko je diferencialne enačbe oblike

$$y' = f(ax + by),$$

vpeljemo novo odvisno spremenljivko

$$v(x) = ax + by(x), \quad v'(x) = a + by'(x).$$

Osnovno diferencialno enačbo prevedemo na diferencialno enačbo

$$v' = bf(v) + a,$$

ki ima ločljive spremenljivke.

- Diferencialno enačbo oblike

$$y' = f(x, y),$$

kjer velja

$$f(x, y) = f(kx, ky), \quad t \in \mathbb{R},$$

imenujemo homogena diferencialna enačba. Diferencialno enačbo rešimo z vpeljavo nove spremenljivke

$$v(x) = \frac{y(x)}{x}, \quad y(x) = xv(x), \quad y'(x) = v(x) + xv'(x),$$

ki ima ločljivi spremenljivki.

15. Dana je diferencialna enačba

$$y' = (x - y)^2.$$

S pomočjo vpeljave nove odvisne spremenljivke poišči rešitve te diferencialne enačbe.

**Rešitev:**

Vpeljimo novo odvisno spremenljivko

$$v(x) = x - y(x),$$

$$v'(x) = 1 - y'(x).$$

Diferencialno enačbo prevedemo v diferencialno enačbo

$$1 - v' = v^2,$$

ki pa je diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama. Ločimo spremenljivke in dobimo

$$\begin{aligned} \frac{dv}{1-v^2} &= dx, \\ \int \frac{dv}{1-v^2} &= \int dx, \end{aligned}$$

kjer integral leve strani izračunamo s pomočjo razcepa na parcialne ulomke,

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{1}{2} \frac{1}{1-v} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+v} \right) dv &= \int dx, \\ -\ln|1-v| + \ln|1+v| &= 2x + c, \\ \ln \left| \frac{1+v}{1-v} \right| &= 2x + c, \\ \ln \left| \frac{1+v}{1-v} \right| &= 2x + c, \\ \frac{1+v}{1-v} &= Ae^{2x} \\ v &= \frac{Ae^{2x} - 1}{1 + Ae^{2x}}. \end{aligned}$$

$$y(x) = x - v(x) = x - \frac{e^{2x}A - 1}{1 + e^{2x}A}.$$

Splošna rešitev  $y(x)$  je torej podana implicitno.

16. Dana je diferencialna enačba

$$y' = \frac{(x+y)^2}{2x^2}.$$

S pomočjo vpeljave nove odvisne spremenljivke poišči rešitve te diferencialne enačbe.

**Rešitev:**

Pišimo  $f(x, y) = \frac{(x+y)^2}{2x^2}$ . Ker velja  $f(x, y) = (kx, ky)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , vpeljemo novo spremenljivko

$$v(x) = \frac{y(x)}{x}, \quad y(x) = xv(x), \quad y'(x) = v(x) + xv'(x).$$

Z uvedbo nove spremenljivke se dana diferencialna enačba preoblikuje v v diferencialno enačbo

$$\begin{aligned} v + xv' &= \frac{(x+v)^2}{2x^2} \\ xv' &= \frac{1+v^2}{2} \\ \frac{2 \, dv}{1+v^2} &= \frac{dx}{x} \\ 2 \arctan v &= \ln|x| + C \\ \arctan v(x) &= \frac{\ln|x| + C}{2} \\ \tan(\arctan v(x)) &= \tan\left(\frac{\ln|x| + C}{2}\right) \\ v &= \tan\left(\frac{\ln|x| + C}{2}\right) \\ y(x) &= x \tan\left(\frac{\ln|x| + C}{2}\right). \end{aligned}$$

### 3 Diferencialne enačbe višjega reda

Diferencialne enačbe reda  $n$  reda lahko podamo v obliki

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

#### 3.1 Znižanje reda diferencialne enačbe

- Če v diferencialni enačbi ne nastopa odvisna spremenljivka  $y$ , in je  $k$  najnižji red odvoda, ki nastopa v diferencialni enačbi, uvedemo spremenljivko  $u(x) = y^{(k)}(x)$  in diferencialno enačbo prevedemo v diferencialno enačbo reda  $(n - k)$  za funkcijo  $u = u(x)$ . Torej diferencialna enačba

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

se spremeni v diferencialno enačbo

$$F(x, u, u', \dots, u^{(n-k)}) = 0.$$

- Če v diferencialni enačbi ne nastopa neodvisna spremenljivka  $x$ , uvedemo spremenljivko  $p(y(x)) = y'(x)$ . S pomočjo te substitucije prevedemo diferencialno enačbo v diferencialno enačbo nižjega reda za funkcijo  $p = p(y)$ .

17. Dana je diferencialna enačba

$$y'' = \sqrt{1 - (y')^2}.$$

S pomočjo znižanja reda diferencialne enačbe poišči splošno rešitev diferencialne enačbe.

**Rešitev:** Odvisna spremenljivka  $y$  v diferencialni enačbi ne nastopa, zato vpeljemo novo odvisno spremenljivko

$$u(x) = y'(x),$$

$u'(x) = y''(x)$ . V novih spremenljivkah ima diferencialna enačba obliko

$$u' = \sqrt{1 - u^2},$$

oziroma

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{1 - u^2}.$$

Ločimo spremenljivki in dobimo

$$\frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = dx,$$

$$\arcsin u = x + C,$$

$$\arcsin y'(x) = x + C,$$

$$\sin(\arcsin y'(x)) = \sin(x + C),$$

$$y'(x) = \sin(x + C),$$

$$\int y'(x) dx = \int \sin(x + C) dx,$$

$$y(x) = -\cos(x + C) + D.$$

To je splošna rešitev.

18. Dana je diferencialna enčba

$$y'' = x + 1.$$

S pomočjo znižanja reda diferencialne enačbe poišči splošno rešitev diferencialne enačbe.

**Rešitev:** Odvisna spremenljivka  $y$  v diferencialni enačbi ne nastopa, zato vpeljemo novo odvisno spremenljivko

$$u(x) = y'(x),$$

$u'(x) = y''(x)$ . V novih spremenljivkah ima diferencialna enačba sledečo obliko

$$u' = x + 1.$$

Ločimo spremenljivki

$$du = (x + 1) dx,$$

$$\int du = \int (x + 1) dx,$$

$$u = \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Upoštevajmo še  $u(x) = y'(x)$ , in rešimo še diferencialno enačbo

$$y' = \frac{x^2}{2} + x + C,$$

$$y(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + Cx + D.$$

To je splošna rešitev.

19. Dana je diferencialna enačba

$$yy'' = (y')^2, \quad y \neq 0.$$

Znižaj red diferencialne enačbe in poišči splošno rešitev.

**Rešitev:** V diferencialni enačbi ne nastopa neodvisna spremenljivka  $x$ , zato vpeljemo  $p(y(x)) = y'(x)$ , ali krajše  $p = y'$ .

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p'p.$$

Vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo novo diferencialno enačbo za funkcijo  $p = p(y)$ .

$$y(pp') = p^2,$$

$$ypp' - p^2 = 0,$$

$$p(y p' - p) = 0.$$

Produkt v enačbi je enak nič, če velja ena od naslednjih možnosti:

(a) Velja  $p = 0$ , oziroma  $y' = p = 0$ . Od tod sledi, da je  $y$  enaka konstanti funkciji.

(b) Velja

$$y p' - p = 0,$$

kar pa je diferencialna enačba z ločljivimi spremenljivkami za neznano funkcijo  $p = p(y)$ . Ločimo spremenljivki in dobimo

$$\frac{p'}{p} = y,$$

kjer je  $p' = \frac{dp}{dy}$  in

$$\frac{dp}{p} = dy,$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int dy,$$

$$\ln|p| = y + C,$$

$$p = Ay,$$

$$y' = Ay,$$

$$\frac{dy}{dx} = Ay,$$

$$\frac{dy}{y} = A dx,$$

$$\ln|y| = Ax + B,$$

$$|y| = e^{Ax+B} = e^{Ax} e^B.$$

$$y = De^{Ax}.$$



### 3.2 Linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti

20. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

**Rešitev:** Vpeljemo nastavek

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

Vstavimo nastavek v diferencialno enačbo in dobimo, da mora  $\lambda$  zadoščati naslednji karakteristični kvadratni enačbi

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0.$$

Ničli sta  $\lambda_1 = 2$  in  $\lambda_2 = 3$ . Splošna rešitev je

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}.$$

21. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$4y'' + 12y' + 9y = 0.$$

**Rešitev:** Rešujemo z nastavkom  $y(x) = e^{\lambda x}$ . Karakteristična kvadratna enačba je

$$4\lambda^2 + 12\lambda + 9 = 0,$$

$$(2\lambda + 3)^2 = 0,$$

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{3}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{3}{2}x}.$$

22. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

**Rešitev:** Rešujemo z nastavkom  $y(x) = e^{\lambda x}$ . Karakteristična kvadratna enačba je

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0.$$

Izračunajmo diskriminanto

$$D = 36 - 52 = -16,$$

torej imamo dve konjugirano kompleksni ničli

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2i.$$

Splošna rešitev ima obliko

$$y(x) = C_1 e^{3x} \cos 2x + c_2 e^{3x} \sin 2x.$$

23. Dana je diferencialna enačba

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

(a) Poišči splošno rešitev.

(b) Poišči tisto rešitev, ki zadošča pogoju  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

**Rešitev:**

(a) Vpeljemo nastavek

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

Vstavimo nastavek v diferencialno enačbo in dobimo, da je  $\lambda$  rešitev naslednje kvadratne karakteristične enačbe

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0.$$

Rešitvi enačbe sta  $\lambda - 1 = 2$  in  $\lambda = -3$ . Splošna rešitev je

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

(b) Upoštevajmo pogoj  $y(0) = 1$  in dobimo

$$1 = y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2.$$

Upoštevajmo še pogoj  $y'(0) = 0$ .

$$y'(x) = 2C_1 e^{2x} - 3C_2 e^{-3x},$$

$$0 = y'(0) = 2C_1 - 3C_2.$$

Razrešimo sistem enačb in dobimo

$$C_1 = \frac{3}{5}, \quad C_2 = \frac{2}{5}.$$

Rešitev, ki zadošča obema pogojema je

$$y(x) = \frac{3}{5}e^{2x} + \frac{2}{5}e^{-3x}.$$

24. Dana je diferencialna enačba

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

- (a) Poišči splošno rešitev.  
 (b) Poišči tisto rešitev, ki zadošča pogojema  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = 3$ .

**Rešitev:**

- (a) Rešujemo z nastavkom  $y(x) = e^{\lambda x}$ . Karakteristična kvadratna enačba je

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$

$$(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Enačba ima eno dvojno rešitev  $\lambda = -1$ .

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

- (b) Ob upoštevanju pogoja  $y(0) = 1$  sledi  $C_1 = 1$ . Ob upoštevanju pogoja  $y(1) = 3$ , sledi  $3 = C_1 e^{-1} + C_2 e^{-1}$ , torej

$$C_2 = 3e - 1.$$

Iskana rešitev je

$$y(x) = e^{-x} + (3e - 1) x e^{-x}.$$

25. Dana je diferencialna enačba

$$y'' + y = 0.$$

- (a) Poišči splošno rešitev.  
 (b) Poišči tisto rešitev, ki zadošča pogojema  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 3$ .

**Rešitev:**

- (a) Rešujemo z nastavkom  $y(x) = e^{\lambda x}$ . Število  $\lambda$  mora zadoščati kvadratni enačbi

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Enačba ima dve konjugirano kompleksni rešitvi.

$$\lambda_{1,2} = \pm i.$$

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

- (b)

$$2 = y(0) = C_1,$$

$$y'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$

$$3 = y'(0) = C_2,$$

$$y(x) = 2 \cos x + 3 \sin x.$$

26. Dana je diferencialna enačba

$$5y'' - 3y' = 0.$$

Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe, ki zadošča pogojema

$$y(0) = 3, \quad y'(0) = 3.$$

**Rešitev:**

1. način reševanja: V diferencialni enačbi  $y$  ne nastopa zato lahko znižamo red diferencialne enačbe z vpeljavo nove odvisne spremenljivke.

$$y' = p,$$

vstavimo v diferencialno enčbo in dobimo

$$5p' - 3p = 0,$$

$$5 \frac{dp}{dx} - 3p = 0,$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{3}{5} dx,$$

$$\begin{aligned} \ln|p| &= \frac{3}{5}x + C, \\ p(x) &= Ae^{\frac{3}{5}x}, \\ y'(x) &= Ae^{\frac{3}{5}x}, \\ \int y'(x) \, dx &= \int Ae^{\frac{3}{5}x} \, dx, \\ y(x) &= A\frac{5}{3}e^{\frac{3}{5}x} + B, \\ y(0) &= \frac{5A}{3} + B = 10, \\ y'(x) &= \frac{5A}{3}e^{\frac{3}{5}x} \frac{3}{5} = Ae^{\frac{3}{5}x}, \\ y'(0) &= A = 3, \\ y(x) &= 3e^{\frac{3}{5}x} \frac{5}{3} + B = 5e^{\frac{3}{5}x} + 5. \end{aligned}$$

2. način reševanja: Vpeljemo nastavek  $y(x) = e^{\lambda x}$  in dobimo karakteristično enačbo

$$\begin{aligned} 5\lambda^2 - 3\lambda &= 0, \\ \lambda(5\lambda - 3) &= 0, \\ \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 &= \frac{3}{5}, \\ y(x) &= C_1e^{0x} + C_2e^{\frac{3}{5}x} = C_1 + C_2e^{\frac{3}{5}x}, \\ y'(x) &= \frac{3}{5}e^{\frac{3}{5}x}, \\ y(0) &= C_1 + C_2 = 10, \\ y'(0) &= \frac{3}{5}C_2 = 3, \\ C_2 = 5, \quad C_1 &= 5. \\ y(x) &= 5 + 5e^{\frac{3}{5}x}, \end{aligned}$$

**Nehomogena linearna diferencialna enačba 2. reda s konstantnimi koeficienti** je oblike

$$ay'' + by' + cy = d(x),$$

kjer velja

$$a, b, c \in \mathbb{R} \quad d(x) \text{ je zvezna funkcija.}$$

Splošna rešitev ima obliko

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

kjer je  $y_p(x)$  partikularna rešitev nehomogene diferencialne enačbe. V primeru ko je  $d(x) = p(x)e^{\gamma x}$ , partikularno rešitev poiščemo z nastavkom

$$y_p(x) = x^l P(x)e^{\gamma x},$$

kjer je  $P$  polinom in velja  $stP = stp$ , število  $l$  je kratnost ničle  $\gamma$  karakterističnega polinoma. Seveda,  $l = 0$ , v primeru, ko  $\gamma$  ni ničla karakteristične enačbe

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

27. Dana je diferencialna enačba

$$y'' + y' - 2y = x^2.$$

Poišči splošno rešitev.

**Rešitev:**

Poiščimo najprej splošno rešitev homogene diferencialne enačbe:

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Rešujemo z nastavkom  $y(x) = e^{\lambda x}$ . Karakteristična kvadratna enačba je

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0,$$

od koder sledi splošna rešitev homogene diferencialne enačbe

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Poiščimo še p  $d(x) = x^2 e^{0x} = p(x)e^{\gamma x}$ ,  $p(x) = x^2$ ,  $\gamma = 0$ . Ker število  $\gamma = 0$  ni ničla karakteristične kvadratne enačbe, lahko poiščimo rešitev nehomogene diferencialne enačbe z nastavkom

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

$$y_p'(x) = Ax + B,$$

$$y'' = 2A.$$

Vstavimo v nehomogeno diferencialno enačbo

$$2A + 2Ax + B - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2,$$

$$-2A = 1,$$

$$2A - 2B = 0,$$

$$2A + B - 2C = 0.$$

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = -\frac{3}{4}.$$

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4},$$

od tod sledi splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + C_1e^x + C_2e^{-2x}.$$

28. Dana je diferencialna enačba

$$y'' + 4y = e^{3x}.$$

Poišči splošno rešitev.

**Rešitev:**

Karakteristična kvadratna enačba je

$$\lambda^2 + 4 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i,$$

Splošna rešitev homogene diferencialne enačbe je

$$y_h(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Poiščimo še partikularno rešitev  $d(x) = e^{3x} = p(x)e^{\gamma x}$ ,  $\gamma = 3$ ,  $p(x) = 1$ . Število  $\gamma = 3$  ni ničla karakterističnega polinoma, torej vzamemo nastavek

$$y_p(x) = Ae^{3x},$$

$$y_p'(x) = 3Ae^{3x},$$

$$y_p''(x) = 9Ae^{3x},$$

$$9Ae^{3x} + 4Ae^{3x} = e^{3x},$$

$$13Ae^{3x} = 1,$$

$$A = \frac{1}{13}e^{3x},$$

$$y_p(x) = \frac{1}{13}e^{3x}.$$

Splošna rešitev nehomogene enačbe

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{13}e^{3x}.$$

29. Dana je diferencialna enačba

$$y'' - 3y' + 2y = 1 + e^x,$$

(a) Poišči splošno rešitev.

(b) Poišči tisto rešitev, ki zadošča pogojev  $y(0) = 1$  in  $y(1) = 1$ .

**Rešitev:**

(a) Rešimo najprej homogeno diferencialno enačbo

$$y'' - 3y' + 2y = 0,$$

Rešitev iščemo z nastavkom  $y(x) = e^{\lambda x}$ , in dobimo, da mora veljati

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0,$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2,$$

splošna rešitev homogene se torej glasi

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^x.$$

Desna stran nehomogene diferencialne enačbe je vsota dveh funkcij  $d_1(x) = 1$  in  $d_2(x) = e^x$ . Nehomogeno diferencialno enačbo lahko rešujemo za vsak sumand  $d_1(x) = 1$  in  $d_2(x) = e^x$  posebej. Poiščimo najprej partikularno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - 3y' + 2y = 1.$$



Desna stran je  $d_1(x) = 1 = 1e^{0 \cdot x}$ , torej je  $\gamma = 0$  in  $p(x) = 1$ . Ker število 0 ni lastna vrednost kakarakterističnega polinoma in je  $p(x)$  polinom stopnje nič, partikularno rešitev iščemo z nastavkom  $y_{p_1}(x) = A$  (polinom stopnje nič). Vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo

$$2A = 1,$$

od kod sledi

$$y_{p_1}(x) = A = \frac{1}{2}.$$

Poiščimo najprej partikularno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

Desna stran je oblike  $e^x = 1e^{1x} = p(x)e^{\gamma x}$  kjer je  $p(x) = 1$  (polinom stopnje 0) in število  $\gamma = 1$  je ničla karakterističnega polinoma stopnje  $l = 1$ , torej partikularno rešitev iščemo v obliki

$$y_{p_2}(x) = x^l P(x)e^x, \quad P(x) = B,$$

odvajamo

$$y'_{p_2}(x) = Be^x + xBe^x = e^x(B + xB).$$

$$y''_{p_2}(x) = Be^x + Be^x + xBe^x = e^x(2B + xB).$$

Vstavimo nastavek v diferencialno enačbo

$$y''_{p_2} - 3y'_{p_2} + 2y_{p_2} = e^x,$$

$$e^x(2B + xB) - 3e^x(B + xB) + 2xBe^x = e^x,$$

$$B = -1,$$

$$y_{p_2}(x) = -xe^x.$$

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = \frac{1}{2} - xe^x,$$

je iskana partikularna rešitev. Splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe je torej

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \frac{1}{2} - xe^x.$$

- (b) Določimo konstanti  $C_1$  in  $C_2$ , da bosta izpolnjena pogoja  $y(0) = 1$  in  $y(1) = 1$ .

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 + \frac{1}{2} - 0 = 1,$$

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{2}.$$

$$y(1) = C_1 e^2 + C_2 e + \frac{1}{2} - e,$$

$$C_1 e^2 + C_2 e - e = \frac{1}{2}.$$

$$C_1 = \frac{1}{2} - C_2,$$

$$\left(\frac{1}{2} - C_2\right)e^2 + C_2 e - e = -\frac{1}{2},$$

$$C_2 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2 + e}{e - e^2},$$

$$C_1 = \frac{1}{2} - C_2 = \frac{1}{2} \frac{e + 1}{e(e - 1)}.$$

Iskana rešitev, ki zadošča pogojema je

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{e + 1}{e(e - 1)} e^{2x} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2 + e}{e - e^2} e^x + \frac{1}{2} - e^x.$$

30. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

**Rešitev:**

Poiščimo najprej rešitev homogene diferencialne enačbe

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Rešitev iščemo z nastavkom  $y(x) = e^{\lambda x}$ . Število  $\lambda$  mora zadoščati naslednji karakteristični kvadratni enači

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Enačba ima dvojno ničlo

$$\lambda = 1.$$

Splošna rešitev homogene diferencialne enačbe je torej

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Desna stran je oblike  $1e^{\gamma x}$ , kjer je  $\gamma = 1$  in število  $\gamma = 1$  je dvojna ničla karakterističnega polinoma, torej  $l = 2$ . Torej partikularno rešitev iščemo v obliki

$$y_p(x) = x^2 A e^x.$$

$$y'(x) = e^x (2Ax + x^2 A),$$

$$y''(x) = e^x (x^2 A + 4Ax + 2A).$$

Vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = e^x,$$

od koder sledi

$$A = \frac{1}{2}$$

in partikularna rešitev je

$$y_p(x) = x^2 \frac{1}{2} e^x.$$

Torej iskana splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe je

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + x^2 \frac{1}{2} e^x.$$

31. Dana je diferencialna enačba

$$y'' - 4y = \cos 2x.$$

- (a) Poišči splošno rešitev.  
 (b) Poišči tisto rešitev, ki zadošča pogojem  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

**Rešitev:**

- (a) Poiščimo najprej splošno rešitev homogene diferencialne enačbe

$$y'' - 4y = 0.$$

Vpeljemo nastavek  $y(x) = e^{\lambda x}$  in dobimo karakteristično enačbo

$$\lambda^2 - 4 = 0,$$

z ničlami

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2.$$

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Poiščimo splošno rešitev nehomogene diferencialne enačbe. Poiščimo partikularno rešitev. V primeru, ko je desna stran oblike

$$d(x) = p(x)e^{\gamma x} \cos \delta x,$$

partikularno rešitev iščemo v obliki

- (a) Število  $\gamma + i\delta$  ni ničla karakterističnega polinoma. Tedaj  $y_p(x) = P(x)e^{\gamma x} \cos \delta x + Q(x)e^{\gamma x} \sin \delta x$ , kjer sta  $P$  in  $Q$  polinoma iste stopnje kot polinom  $p$ .
- (b) Število  $\gamma + i\delta$  je ničla karakterističnega polinoma stopnje  $l$ . Tedaj  $y_p(x) = x^l (P(x)e^{\gamma x} \cos \delta x + Q(x)e^{\gamma x} \sin \delta x)$ , kjer sta  $P$  in  $Q$  polinoma iste stopnje kot polinom  $p$ .

Desna stran je  $\cos 2x$ , torej  $p(x) = 1$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\delta = 2$  in  $\gamma + i\delta = i2$  ni ničla karakterističnega polinoma. Torej

$$y_p(x) = C \cos 2x + D \sin 2x,$$

kjer sta  $C$  in  $D$  realni konstanti.

$$y_p'(x) = -2C \sin 2x + 2D \cos 2x,$$

$$y_p''(x) = -4C \cos 2x - 4D \sin 2x.$$

Vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo

$$-4C \cos 2x - 4D \sin 2x - 4C \cos 2x + D \sin 2x = \cos 2x,$$

$$-8C \cos 2x - 8D \sin 2x = \cos 2x,$$

Od tod sledi:

$$-8C = 1, \quad C = -\frac{1}{8},$$

$$-8D = 0, \quad D = 0,$$

$$y_p(x) = -\frac{1}{8} \cos 2x.$$

Splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe je

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{8} \cos 2x.$$

(b)

$$\begin{aligned}
 y(0) &= 1, & y'(0) &= 0, \\
 1 &= y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{8}, \\
 y'(x) &= 2C_1e^{2x} - 2C_2e^{-2x} + \frac{2}{8}\sin(2x), \\
 0 &= y'(0) = 2C_1 - 2C_2, & C_1 &= C_2.
 \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned}
 \frac{9}{8} &= 2C_2, \\
 C_2 &= \frac{9}{16} = C_1. \\
 y(x) &= \frac{9}{16}e^{2x} + \frac{9}{16}e^{-2x} - \frac{1}{8}\cos 2x.
 \end{aligned}$$

32. Dana je diferencialna enačba

$$y'' - 4y' + 13y = e^{2x} \cos 3x.$$

Poišči splošno rešitev.

**Rešitev:**

Poiščimo splošno rešitev homogene diferencialne enačbe.

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

Vpeljemo nastavek  $y(x) = e^{\lambda x}$  in dobimo karakterisitčno enačbo

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0,$$

ketera ničli sta

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = 2 \pm 3i.$$

Splošna rešitev homogene diferencialne enačbe je

$$y_h(x) = C_1e^{2x} \cos 3x + C_2e^{2x} \sin 3x.$$

Poiščimo še partikularno rešitev nehomogene diferencialne enačbe. Desna stran je  $e^{2x} \cos 3x$ , torej je  $p(x) = 1$ . Stopnja polinoma  $p$  je enaka 0,  $\gamma = 2$ ,  $\delta = 3$ . Število  $\gamma$  + iffi je ničla karakterističnega polinoma stopnje (oziroma kratnosti)  $l = 1$ . Torej vzamemo nastavek

$$y_p(x) = x (Ae^{2x} \cos 3x + Be^{2x} \sin 3x).$$

Nastavek vstavimo v diferencialno enačbo

$$y_p'' - 4y_p' + 13y_p = e^{2x} \cos 3x,$$

od koder sledi

$$(-1 + 6B) \cos 3x - 6A \sin 3x = 0,$$

$$-1 + 6B = 0, \quad B = \frac{1}{6}.$$

$$-6A = 0, \quad A = 0.$$

$$y_p(x) = x \frac{1}{6} e^{2x} \sin 3x.$$

Splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe je

$$C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x + x \frac{1}{6} e^{2x} \sin 3x.$$

33. Dana je diferencialna enčba

$$y'' + y' - 2y = x^2 + \sin x.$$

Poišči splošno rešitev.

**Rešitev:**

Poiščimo najprej rešitev homogene enačbe

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Vpeljemo nastavek  $y(x) = e^{\lambda x}$  in dobimo karaterisitčno enačbo

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1) =$$

z ničlami

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1.$$

Splošna rešitev homogene diferencialne enačbe

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Poiščimo pratikularno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' + y' - 2y = x^2.$$

Desna stran  $x^2$  je polinom druge stopnje. Ker število 0 ni lastna vrednost karakterističnega polinoma, vpeljemo nastavek

$$y_{p1}(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

$$y_{p1}'' + y_{p1}' - 2y_{p1} = x^2,$$

od koder sledi

$$-2Ax^2 + (2A - 2B)x + (2A + B - 2C) = x^2,$$

$$-2A = 1,$$

$$2A - 2B = 0,$$

$$2A + B - 2C = 0,$$

$$A = -\frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = -\frac{3}{4}.$$

$$y_{p1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}.$$

Poiščimo še partikularno rešitev  $y_{p2}(x)$  diferencialne enačbe

$$y'' + y' - 2y = \sin x.$$

V tem primeru je  $p(x) = 1$ ,  $\sin x = e^{0x} \sin(1x)$ , torej  $\gamma = 0$ ,  $\delta = 1$  in  $p$  je polinom stopnje 0. Vzamemo nastavek

$$y_{p2}(x) = A \cos x + B \sin x,$$

$$y_{p2}'(x) = -A \sin x + B \cos x,$$

$$y_{p2}''(x) = -A \cos x - B \sin x.$$

Vstavimo v diferencialno enačbo

$$y_{p2}'' + y_{p2}' - 2y_{p2} = \sin x.$$

$$(-A \cos x - B \sin x) + (-A \sin x + B \cos x) - 2(A \cos x + B \sin x) = \sin x,$$

$$(-3A + B) \cos x + (-A - 3B) \sin x = \sin x.$$

$$-3A + B = 0,$$

$$-A - 3B = 1,$$

$$A = -\frac{1}{10}, \quad B = -\frac{3}{10}.$$

$$y_{p2}(x) = -\frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x.$$

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + -\frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x.$$

Splošna rešitev

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + -\frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x.$$

34. Dana je diferencialna enačba

$$y'' - 6y' + 13y = e^{2x} \cos 3x.$$

Poišči splošno rešitev.

**Rešitev:**

Poiščimo najprej splošno rešitev homogene enačbe.

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

Vpeljemo nastavek  $y(x) = e^{\lambda x}$  in dobimo karakteristično enačbo

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0,$$

z ničlami

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 52}}{2} = 3 \pm 2i,$$

$$y_h(x) = C_1 e^{3x} \cos 2x + C_2 e^{3x} \sin 2x.$$

Poiščimo še partikularno rešitev. Desna stran je  $d(x) = e^{2x} \cos 3x$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\delta = 3$ ,  $p(x) = 1$ . Število  $2 + 3i$  ni ničla karakterističnega polinoma, torej je nastavek za partikularno rešitev

$$y_p(x) = A e^{2x} \cos 3x + B e^{2x} \sin 3x.$$

Vstavimo nastavek v diferencialno enačbo in dobimo

$$y_p''(x) - 6y_p'(x) + 13y_p = e^{2x} \cos 3x.$$

$$A = -\frac{2}{26}, \quad B = -\frac{3}{26}.$$

$$y_p(x) = -\frac{2}{26} e^{2x} \cos 3x - \frac{3}{26} e^{2x} \sin 3x.$$

$$y(x) = C_1 e^{3x} \cos 2x + C_2 e^{3x} \sin 2x + -\frac{2}{26} e^{2x} \cos 3x - \frac{3}{26} e^{2x} \sin 3x.$$



35. Dana je diferencialna enačba

$$y'' - 6y' + 13y = e^{3x} \cos 2x.$$

Poišči splošno rešitev.

**Rešitev:**

Poiščimo najprej splošno rešitev homogene enačbe

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

Vpeljemo nastavek  $y(x) = e^{\lambda x}$  in dobimo karakteristično enačbo

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0,$$

katere ničli sta

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 52}}{2} = 3 \pm 2i,$$

$$y_h(x) = C_1 e^{3x} \cos 2x + C_2 e^{3x} \sin 2x.$$

Poiščimo še rešitev nehomogene diferencialne enačbe. Desna stran je  $d(x) = e^{3x} \cos 2x = p(x)e^{\gamma x} \cos \delta x$ ,  $\gamma = 3$ ,  $\delta = 2$ . Število  $3 + 2i$  je ničla karakterističnega polinoma stopnje 1, torej je nastavek za partikularno rešitev nehomogene diferencialne enačbe sledeč:

$$y_p(x) = x (Ae^{3x} \cos 2x + Be^{3x} \sin 2x).$$

Vstavimo nastavek v diferencialno enačbo

$$y_p'' - 6y_p' + 13y_p = e^{3x} \cos 2x.$$

od koder sledi  $A = 0$ ,  $B = \frac{1}{4}$ .

$$y_p(x) = x \frac{1}{4} e^{3x} \sin 2x.$$

Splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe je

$$y(x) = C_1 e^{3x} \cos 2x + C_2 e^{3x} \sin 2x + x \frac{1}{4} e^{3x} \sin 2x.$$

### 3.3 Homogena Eulerjeva diferencialna enačba

**Homogena Eulerjeva diferencialna enačba drugega reda** je diferencialna enačba oblike

$$a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0,$$

kjer so  $a_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , realna števila. Pri reševanju vpeljemo nastavek

$$y = x^\lambda, \quad y'(x) = \lambda x^{\lambda-1}, \quad y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}.$$

Nastavek vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo

$$a_2x^\lambda\lambda(\lambda-1) + a_1x^\lambda\lambda + x^\lambda a_0 = 0,$$

od koder sledi

$$a_2\lambda(\lambda-1) + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

- V primeru, ko ima ta kvadratna enačba dve različni realni rešitvi  $\lambda_1, \lambda_2$ , je splošna rešitev homogene Eulerjeve diferencialne enačbe oblike

$$y(x) = C_1x^{\lambda_1} + C_2x^{\lambda_2}.$$

- V primeru, ko ima ta kvadratna enačba eno dvojno rešitev  $\lambda$ , je splošna rešitev homogene Eulerjeve diferencialne enačbe oblike

$$y(x) = C_1x^\lambda + C_2x^\lambda \ln x.$$

- V primeru, ko ima ta kvadratna enačba konjugirano kompleksni ničli  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  in  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , je splošna rešitev homogene Eulerjeve diferencialne enačbe oblike

$$y(x) = C_1x^\alpha \cos(\beta \ln x) + C_2x^\alpha \sin(\beta \ln x).$$

36. Dana je diferencialna enačba

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0,$$

Poišči splošno rešitev.

**Rešitev:**

Dana diferencialna enačba je homogena Eulerjeva diferencialna enačba. Vpeljemo nastavek

$$y(x) = x^\lambda,$$

vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo enačbo, ki ji mora zadoščati parameter  $\lambda$ .

$$\lambda(\lambda - 1) - 3\lambda + 4 = 0,$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

$$(\lambda - 2)^2 = 0,$$

$\lambda = 2$  je dvojna ničla. Torej je splošna rešitev

$$y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x = x^2 (C_1 + C_2 \ln x).$$

37. Dana je diferencialna enačba

$$x^2 y'' + 7xy' + 13y = 0.$$

Poišči splošno rešitev.

**Rešitev:** Dana diferencialna enačba je homogena Eulerjeva diferencialna enačba. Vpeljemo nastavek

$$y(x) = x^\lambda,$$

vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo enačbo, ki ji mora zadoščati parameter  $\lambda$ .

$$\lambda(\lambda - 1)x^\lambda + 7\lambda x^\lambda + 13x^\lambda = 0,$$

$$\lambda(\lambda - 1) + 7\lambda + 13 = 0,$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{-6 - 4i}{2} = -3 \pm 2i.$$

Splošna rešitev je

$$y(x) = x^{-3} (A \cos(2 \ln x) + B \sin(2 \ln x)).$$

## 4 Sistemi linearnih diferencialnih enačb

Obravnavali bomo sisteme linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti.

Sistem  $n$  linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(x) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + f_2(x) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n(x), \end{aligned}$$

kjer so  $a_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n$ , realna števila in  $f_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , zvezne funkcije.

Sistem  $n$  linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti lahko rešimo bodisi s pomočjo pretvorbe na diferencialno enačbo reda  $n$ , bodisi na matričen način.

38. Dan je sistem diferencialnih enačb

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}.$$

Poišči splošno rešitev.

**Rešitev:**

Iz prve diferencialne enačbe izrazimo eno spremenljivko npr. spremenljivko  $y$ ,

$$y = \dot{x} + x, \quad (4)$$

dobljeno enačbo odvajamo in dobimo

$$\dot{y} = \ddot{x} + \dot{x},$$

Upoštevamo drugo diferencialno enačbo in dobimo

$$-x - y = \ddot{x} + \dot{x},$$

od koder ob upoštevanju enačbe (4) dobimo

$$-x - (\dot{x} + x) = \ddot{x} + \dot{x},$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0,$$

Vpeljemo nastavek

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo karakteristično enačbo

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = -1 \pm i.$$

$$x(t) = C_1 e^{-t} \cos t + C_2 e^{-t} \sin t,$$

ob upoštevanju (4) od tod dobimo,

$$y(t) = -\dot{x}(t) + x(t) =$$

$$\begin{aligned} &= -C_1 e^{-t} \cos t + C_1 e^{-t} (-\sin t) + (-C_2 e^{-t} \sin t + C_2 e^{-t} \cos t + C_1 e^{-t} \cos t + C_2 e^{-t} \sin t) = \\ &= \cos t (-C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t} + C_1 e^{-t}) + \sin t (-C_1 e^{-t} - C_2 e^{-t} + C_2 e^{-t}). \end{aligned}$$

39. Dan je sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 - 2y_2 \end{aligned} .$$

Poišči splošno rešitev.

**Rešitev:**

Iz prve diferencialne enačbe izrazimo  $y_2$  in dobimo

$$y_2 = y_1' - 2y_1. \quad (5)$$

Enačbo odvajamo

$$y_2' = y_1'' - 2y_1',$$

in upoštevamo drugo diferencialno enačbo

$$y_1 - 2y_2 = y_1'' - 2y_1'.$$

Iz enačbe (5) od tod sledi

$$y_1 - 2y_1' + 4y_1 = y_1'' - 2y_1',$$

$$5y_1 = y_1'',$$

$$y_1'' - 5y_1 = 0,$$

$$y_1(x) = e^{\lambda x},$$

$$\lambda^2 - 5 = 0,$$

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \pm\sqrt{5}, \\ y_1(x) &= C_1 e^{\sqrt{5}x} + C_2 e^{-\sqrt{5}x}, \\ y_2(x) &= \sqrt{5}C_1 e^{\sqrt{5}x} - C_2 \sqrt{5} e^{-\sqrt{5}x} - 2(C_1 e^{\sqrt{5}x} + C_2 e^{-\sqrt{5}x}) = \\ &= (\sqrt{5} - 2)C_1 e^{\sqrt{5}x} + (-\sqrt{5} - 2)C_2 e^{-\sqrt{5}x}.\end{aligned}$$

40. Dan je sistem diferencialnih enačb

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 4y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \end{cases}.$$

Poišči tisto rešitev, ki zadošča pogojema

$$y_1(0) = -4, \quad y_2(0) = -4.$$

**Rešitev:**

Iz prve enačbe izrazimo  $y_1$  in dobimo

$$2y_1 = y_1' - 4y_2, \tag{6}$$

odvajamo celo enačbo in dobimo

$$2y_1' = y_1'' - 4y_2',$$

ob upoštevanju druge diferencialne enačbe dobimo

$$2y_1' = y_1'' - 4(y_1 + 2y_2).$$

Iz enačbe (5) od tod sledi

$$\begin{aligned}2y_1' &= y_1'' - 4y_1 - 2(y_1' - 2y_1) = \\ &= y_1'' - 4y_1 - 2y_1' + 4y_1, \\ 2y_1' &= y_1'' - 4y_1 - 2y_1' + 4y_1, \\ 4y_1' - y_1'' &= 0,\end{aligned}$$

vpeljemo nastavek

$$y_1(x) = e^{\lambda x}.$$

Dobimo karakteristično kvadratno enačbo

$$-\lambda^2 + 4\lambda = 0,$$

kateri ničli sta

$$\lambda_1 = 0,$$

$$\lambda_2 = 4,$$

$$y_1(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{4x} = C_1 + C_2 e^{4x},$$

ob upoštevanju (6) dobimo

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{1}{4} (y_1'(x) - 2y_1(x)) = \\ &= \frac{4C_2}{4} e^{4x} - \frac{1}{2} (C_1 + C_2 e^{4x}) = \\ &= \left( C_2 - \frac{1}{2} C_2 \right) e^{4x} - \frac{1}{2} C_1 = \frac{1}{2} (C_2 e^{4x} - C_1). \end{aligned}$$

Določimo še konstanti  $C_1$  in  $C_2$  tako, da bosta izpolnjena začetna pogoja

$$Y_1(0) = 4 = C_1 + C_2,$$

$$y_2(0) = -4 = \left( C_2 - \frac{1}{2} C_2 \right) - \frac{1}{2} C_1 = \frac{1}{2} (C_2 - C_1).$$

Od tod sledi

$$C_2 = -6, \quad C_1 = 2.$$

Rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju je

$$y_1(x) = 2 - 6e^{4x},$$

$$y_2(x) = -3e^{4x} - 1.$$

41. Dan je sistem diferencialnih enačb

$$\begin{cases} \dot{x} = & + y + \cos t \\ \dot{y} = -x & + t \end{cases}.$$

Poišči splošno rešitev.

**Rešitev:**

Sistem diferencialnih enačb je nehomogen. Prevedimo ga najprej na diferencialno enačbo drugega reda. Iz prve enačbe sledi

$$y = \dot{x} - \cos t,$$

to enačbo odvajamo in dobimo

$$\dot{y} = \ddot{x} + \sin t,$$

upoštevamo še drugo diferencialno enačbo in dobimo

$$-x + \sin t + t = \ddot{x} + \sin t,$$

$$\ddot{x} + x = t.$$

To je nehomogena diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti. Rešiti moramo najprej homogeno diferencialno enačbo.

$$\ddot{x} + x = 0.$$

Karakteristični polinom je oblike

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i,$$

torej je splošna rešitev homogene diferencialne enačbe

$$x_h(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Poiščimo še partikularno rešitev nehomogene diferencialne enačbe. Desna stran je  $d(t) = t$  in število 0 ni ničla karakterističnega polinoma, torej je nastavek

$$x_p(t) = A_1 t + A_0,$$

Vstavimo nastavek v diferencialno enačbo in dobimo

$$\ddot{x}_p + x_p = t.$$

od tod sledi

$$0 + A_1 t + A_0 = t,$$

torej

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 1.$$

$$x_p(t) = t,$$

splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe je

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t,$$

$$y(t) = \dot{x}(t) - \cos t = -C_1 \cos t + C_2 \cos t + 1 - \cos t.$$



## 5 Vektorji

1. Dana sta vektorja  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  dolžine 2 in 3, ki oklepata kot  $\frac{\pi}{3}$ . Poišči  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

**Rešitev:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

2. Dana sta vektorja  $\vec{a} = (1, 1, -1)$  in  $\vec{b} = (5, -3, 2)$ . Poišči kot med vektorjema  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ .

**Rešitev:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 5 + 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 = 0.$$

Kot med vektorjema je  $\frac{\pi}{2}$ , torej sta vektorja pravokotna.

3. Dana sta vektorja  $\vec{a} = (-1, 1, 1)$  in  $\vec{b} = (5, -3, 3)$ . Poišči kot med vektorjema  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ .

**Rešitev:** Označimo z  $\varphi$  kot med vektorjema  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ .

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{43}.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \cdot 5 + 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 3 = -5.$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-5}{\sqrt{3}\sqrt{43}},$$

$$\varphi = \arccos \frac{-2}{\sqrt{3}\sqrt{43}}.$$

Torej

$$\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi.$$

4. Ali sta vektorja  $(2, 2, -1)$  in  $(5, -4, 2)$  pravokotna?

**Rešitev:**

$$(2, 2, 1) \cdot (5, -4, -2) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-2) = 0.$$

Skalarni produkt vektorjev je enak nič, torej sta vektorja pravokotna.

5. Dana sta vektorja  $\vec{a} = (-2, 3, 1)$  in  $\vec{b} = (1, 1, 2)$ . Poišči pravokotno projekcijo vektorja  $\vec{b}$  na vektor  $\vec{a}$  in izračunaj velikost pravokotne projekcije.

**Rešitev:** Označimo z  $\text{proj}_{\vec{a}}\vec{b}$  pravokotno projekcijo vektorja  $\vec{b}$  na vektor  $\vec{a}$ .

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14},$$

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\vec{a}} \vec{b} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \\ &= \frac{(-2) \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{\sqrt{14}} \frac{(-2, 3, 1)}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{3}{14} (-2, 3, -1). \end{aligned}$$

$$|\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

6. Ali sta vektorja  $\vec{a} = (-2, 4, 1)$  in  $\vec{b} = (4, -8, -2)$  vzporedna?

**Rešitev:** Velja

$$\vec{b} = (4, -8, -2) = (-2)\vec{a},$$

kar pomeni, da sta vektorja vzporedna.

7. Dana sta vektorja  $\vec{a} = (-2, 3, 1)$  in  $\vec{b} = (1, 1, 2)$ . Izračunaj  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

**Rešitev:**

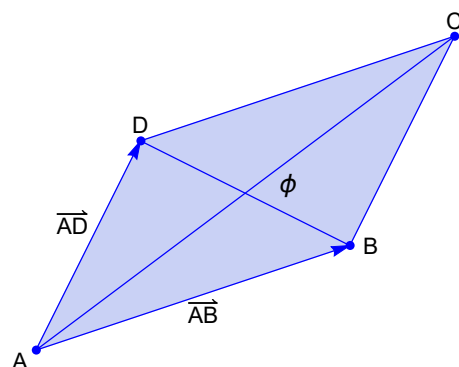
$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (5, 5 - 5). \end{aligned}$$

8. Dan je paralelogram z oglišči  $A(-3, -2, 0)$ ,  $B(3, -3, 1)$ ,  $C(5, 0, 2)$  in  $D(-1, 1, 1)$ .

- (a) Izračunaj kot med diagonalama.  
 (b) Izračunaj ploščino paralelograma.

**Rešitev:**

- (a) Kot med diagonalama je po definiciji ostri kot med vektorjema, ki sta vzporedna diagonalama, to je, kot  $\phi$  med vektorjema  $\vec{AC} = (8, 2, 2)$  in  $\vec{BD} = (-4, 4, 0)$ . Slika je simbolna.



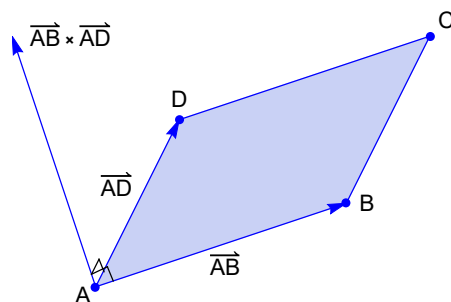
S pomočjo skalarnega produkta lahko izračunamo, da velja

$$\cos \phi = \frac{|\vec{AC} \cdot \vec{BD}|}{|\vec{AC}| |\vec{BD}|} = \frac{|-4 \cdot 8 + 4 \cdot 2|}{\sqrt{64 + 4 + 4} \sqrt{16 + 6}} = \frac{24}{\sqrt{72} \cdot 32} = \frac{1}{2}.$$

Od tod sledi  $\phi = \frac{\pi}{3}$ .

- (b) Vektorski produkt  $\vec{AB} \times \vec{AD}$  kaže v smeri normale na ravnino v kateri leži paralelogram, ki ga vektorja  $\vec{AB}$  in  $\vec{AD}$  napenjata. Dolžina vektorskega produkta pa je enaka ploščini paralelograma, ki ga napenjata vektorja  $\vec{AB}$  in  $\vec{AD}$ . Ploščina paralelograma je

$$\begin{aligned} S = |\vec{AB} \times \vec{AD}| &= |(6, -1, 1) \times (2, 3, 1)| \\ &= |(-4, -4, 20)| \\ &= \sqrt{16 + 16 + 400} = 12\sqrt{3}. \end{aligned}$$



9. Dane so točke  $A(2, -2, 4)$ ,  $B(0, 1, 3)$  in  $(-1, x, y)$ . Določi števili  $x$  in  $y$  tako, da točke  $A$ ,  $B$  in  $C$  ležijo na isti premici.

**Rešitev:** Točke  $A$ ,  $B$  in  $C$  ležijo na isti premici natanko tedaj, ko je  $\vec{AB} \times \vec{AC} = (0, 0, 0)$ , kar pa velja natanko tedaj, ko je  $\vec{AB} = \alpha \vec{AC}$  za nek  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1. način:

$$\overrightarrow{AB} = (0, 1, 3) - (2, -2, 4) = (-2, 3, -1).$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1, x, y) - (2, -2, 4) = (-3, x + 2, y - 4).$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & x+2 & y-4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & x+2 & y-4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -2 & 3 \\ -3 & x+2 \end{vmatrix} \\ &= (-10 + x + 3y, -5 + 2y, 5 - 2x) \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$-10 + x + 3y = 0, \quad -5 + 2y = 0, \quad 5 - 2x = 0,$$

torej

$$y = \frac{5}{2} \quad x = \frac{5}{2}.$$

2. način:

Določiti je potrebno realna števila  $\alpha$ ,  $x$  in  $y$ , da bo veljalo

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AC} &\iff (-2, 3, -1) = \alpha(-3, x + 2, y - 4) \\ &\iff -2 = -3\alpha, \quad 3 = \alpha(x + 2), \quad -1 = \alpha(y - 4). \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\alpha = \frac{2}{3}$$

in

$$y = \frac{5}{2} \quad x = \frac{5}{2}.$$

10. Naj bo  $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\vec{v} = -2\vec{a} - \vec{b}$ ,  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 6$  in vektorja  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  oklepata kot  $\frac{\pi}{3}$ . Izračunaj ploščino paralelograma, ki ga napenjata vektorja  $\vec{u}$  in  $\vec{v}$ .

**Rešitev:**

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= (\vec{a} + 2\vec{b}) \times (-2\vec{a} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} \times (-2\vec{a}) + 2\vec{b} \times (-2\vec{a}) + \vec{a} \times (-\vec{b}) + 2\vec{b} \times (-\vec{b}) \\ &= -4\vec{b} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} \\ &= -\vec{a} \times \vec{b} + 4\vec{a} \times \vec{b} \\ &= 3\vec{a} \times \vec{b}.\end{aligned}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = 3|\vec{a} \times \vec{b}| = 3|\vec{a}||\vec{b}|\sin \frac{\pi}{3} = 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 36.$$

11. Dani so vektorji  $\vec{a} = (-2, 3, 1)$ ,  $\vec{b} = (1, 1, 2)$  in  $\vec{c} = (1, 1, -1)$ . Ali vektorji  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  in  $\vec{c}$  tvorijo pozitivno orientirano bazo v  $\mathbb{R}^3$ .

**Rešitev:** Vektorji  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  in  $\vec{c}$  tvorijo pozitivno orientirano bazo, če je

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0.$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 15 > 0.$$

Torej tvorijo pozitivno orientirano bazo v prostoru  $\mathbb{R}^3$ .

12. Ali so vektorji  $\vec{a} = (1, 4, -7)$ ,  $\vec{b} = (2, -1, 4)$  in  $\vec{c} = (0, -9, 18)$  komplanarni?

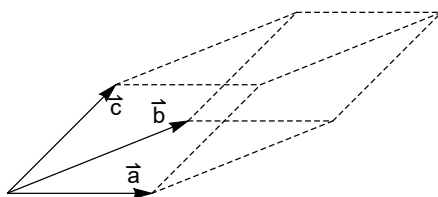
**Rešitev:**

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 18 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Torej vektorji so komplanarni.

13. Poišči volumen paralelepipeda, ki ga napenjajo vektorji  $\vec{a} = (-6, 3, -1)$ ,  $\vec{b} = (0, 1, 2)$  in  $\vec{c} = (4, -2, 5)$ .

**Rešitev:** Paralelepiped je štiristrana poševna prizma, katere osnovna ploskev ima obliko paralelograma. (Slika je simbolična.)



$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} -6 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -26.$$

Volumen paralelipipeda je

$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = 26.$$

14. Dane so točke  $P(1, 4, 6)$ ,  $Q(-2, 5, -1)$  in  $R(1, -1, 1)$ . Poišči vektor, ki je pravokoten na vektorja  $\overrightarrow{PQ}$  in  $\overrightarrow{PR}$ .

**Rešitev:**

$$\overrightarrow{PQ} = (-2, 5, -1) - (1, 4, 6) = (-3, 1, -7).$$

$$\overrightarrow{PR} = (1, -1, 1) - (1, 4, 6) = (0, -5, -5).$$

Vektor  $\vec{n}$ , ki je pravokoten na vektorja  $\overrightarrow{PQ}$  in  $\overrightarrow{PR}$  je vzporeden vektorskemu produktu  $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ . Torej lahko vzamemo

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -3 & 1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \\ &= -40\vec{i} - 15\vec{j} + 15\vec{k} = (-40, -15, 15). \end{aligned}$$

Za vektor  $\vec{n}$  lahko vzamemo vsak vektor  $t(-40, -15, 15)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \neq 0$ .

15. Dane so točke  $P(1, 4, 6)$ ,  $Q(-2, 5, -1)$  in  $R(1, -1, 1)$ . Poišči ploščino trikotnika  $\Delta_{PQR}$  z oglišči  $P$ ,  $Q$  in  $R$ .

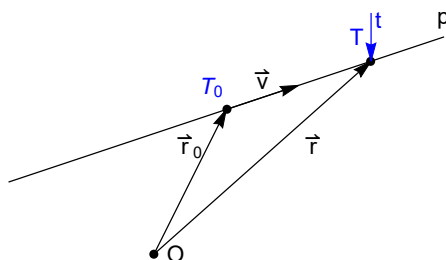
**Rešitev:**

$$\begin{aligned} pl(\Delta_{PQR}) &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| \\ &= \frac{1}{2} |(12, 20, 14)| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(-40)^2 + (-15)^2 + (15)^2} = \frac{1}{2} 5\sqrt{82}. \end{aligned}$$

**Enačba premice v prostoru:** Premica  $p$  v prostoru je podana s točko  $T_0$  na njej in z neničelnim smernim vektorjem  $\vec{v}$ , ki je vzporeden premici  $p$ . Premico  $p$  zapišemo v vektorski obliki

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

kjer je  $\vec{r}_0$  krajevni vektor to točke  $T_0$  in  $\vec{r}$  krajevni vektor to točke  $T$  na premici, ki pripada parametru  $t$ .



16. Poišči enačbo premice  $p$ , ki gre skozi točki  $A(2, 4, -3)$  in  $B(3, -1, 1)$  in ugotovi ali točka  $(6, 1, 3)$  leži na premici  $p$ .

**Rešitev:** Lahko vzamemo, da je smerni vektor premice  $p$  enak vektorju  $\vec{AB}$ .

$$\vec{AB} = (3, -1, 1) - (2, 4, -3) = (1, -5, 4).$$

Enačba premice  $p$  je

$$(x, y, z) = (2, 4, -3) + t(1, -5, 4), \quad t \in \mathbb{R},$$

Parametrična enačba premice  $p$  je

$$\begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 4 - 5t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z &= -3 + 4t \end{aligned}$$

Kanonska enačba premice je

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z+3}{4}.$$

Točka  $(6, 1, 3)$  ne leži na premici  $p$ , saj ne obstaja število  $t$ , da bi veljale vse tri enačbe

$$6 = 2 + t, \quad 1 = 4 - 5t, \quad 3 = -3 + 4t.$$

17. Dani sta premici

$$p : x = 1 + t, \quad y = -2 + 3t, \quad z = 4 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$q : x = 2s, \quad y = 3 + s, \quad z = -3 + 4s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Ali se premici  $p$  in  $q$  sekata? Ali sta premici  $p$  in  $q$  vzporedni? Ali sta premici mimobežni?

**Rešitev:** Premici se bosta sekali, če ima naslednji sistem enačb kakšno rešitev.

$$1 + t = 2s,$$

$$-2 + 3t = 3 + s,$$

$$4 - t = -3 + 4s.$$

Iz prvih dveh enačb dobimo

$$t = \frac{11}{5}, \quad s = \frac{8}{5}.$$

Ti dve števili pa tretji enačbi  $4 - t = -3 + 2s$  ne zadoščata.

Torej se premici  $p$  in  $q$  ne sekata.

Smerni vektor premice  $p$  je vektor  $\vec{v}_p = (1, 3 - 1)$  in smerni vektor premice  $q$  je vektor  $\vec{v}_q = (2, 1, 4)$ . Smerna vektorja nista vzporedna, saj

$$\vec{v}_p \times \vec{v}_q = (13, -6, -5) \neq (0, 0, 0).$$

Torej premici nista vzporedni. Premici sta mimobežni.

18. Dana je premica

$$p : (x, y, z) = (2, 1, 3) + t(0, 1, 3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Poišči kanonično obliko premice  $p$ .

**Rešitev:** Parametrična enačba premice  $p$  je

$$x = 2, \quad y = 1 + t, \quad z = 3 + 3t, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$t = y - 1 = \frac{z - 3}{3},$$

torej je kanonska oblika premice

$$x = 2, \quad y - 1 = \frac{z - 3}{3}.$$



19. Dana je premica

$$p: \frac{x-1}{2} = \frac{z+3}{3}, \quad y=2.$$

Poišči parametrično enačbo premice  $p$ , določi smerni vektor premice  $p$  in poišči dve različni točki na premici  $p$ .

**Rešitev:** Naj bo

$$t = \frac{x-1}{2} = \frac{z+3}{3},$$

torej je parametrično zapisana premica

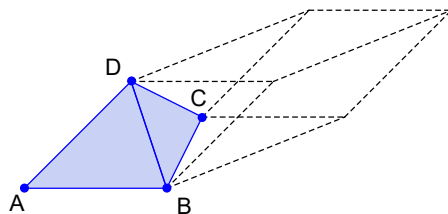
$$x = 1 + t, \quad y = 2, \quad z = -3 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Smerni vektor premice  $p$  je vsak neničelen večkratnik vektorja  $v = (2, 0, 3)$ .

Če izberemo  $t = 0$ , dobimo točko  $T_0 = (1, 2, -3)$  in če izberemo  $t = 2$ , dobimo točko  $T_1 = (3, 2, 3)$ . Točki  $T_0$  in  $T_1$  ležita na premici  $p$ .

20. Oglišča tetraedra so v točkah  $A(-1, 12)$ ,  $B(1, 0, 1)$  in  $C(-3, 1, 1)$  in  $D(4, 1, 2)$ . Izračunaj volumen tetraedra in izračunaj površino osnovne ploskve.

**Rešitev:**



Slika je simbolična.

$$\vec{AB} = (1, 0, 1) - (-1, 12) = (2, -1, -1),$$

$$\vec{AC} = (-3, 1, 1) - (-1, 12) = (-2, 0, -1),$$

$$\vec{AD} = (4, 1, 2) - (-1, 12) = (5, 0, 0).$$

Prostornina tetraedra je enak šestini prostornine paralelepipeda. Torej

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|,$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5.$$

Torej  $V = \frac{5}{6}$ . Izračunajmo še ploščino osnovne ploskve

$$O = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (1, 4, -2).$$

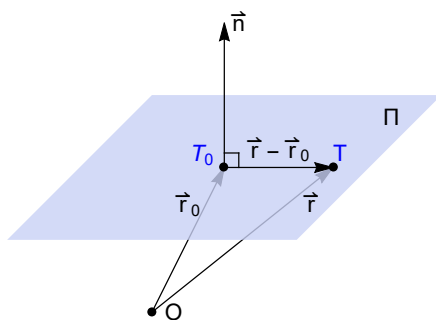
**Enačba ravnine:** Ravnina  $\Pi$  v prostoru je določena s točko, ki leži v ravnini  $\pi$  in normalnim vektorjem. Če ima ravnina  $\Pi$  normalni vektor  $\vec{n} \neq \vec{0}$  in vsebuje točko  $T_0$ , lahko zapišemo enačbo ravnine v obliki

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0,$$

kjer je  $\vec{r}_0$  krajevni vektor do točke  $T_0$  in  $\vec{r}$  krajevni vektor do točke poljubne točke  $T$  na ravnini. Če  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $\vec{r} = (x, y, z)$  in  $\vec{n} = (a, b, c)$ , lahko enačbo ravnine zapišemo v normalni obliki

$$ax + by + cz = d,$$

kjer velja  $d = \vec{n} \cdot \vec{r}_0 = ax_0 + by_0 + cz_0$ .



21. Poišči enačbo ravnine, ki gre skozi točke  $P(1, 3, 2)$ ,  $Q(3, -1, 6)$  in  $R(5, 2, 0)$ .

**Rešitev:** Poiščimo najprej normalo ravnine. Za normalo lahko vzamemo vsak neničelen večkratnik vektorja  $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ . Torej, lahko

izberemo za normalo kar vektorski produkt

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & -4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 20\vec{j} + 14\vec{k} = (12, 20, 14). \end{aligned}$$

Enačba ravnine je

$$12x + 20y + 14z = d,$$

V to enačbo vstavimo točko, ki leži v ravnini, npr: točko  $P$ , in dobimo

$$12 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 14 \cdot 2 = 12 + 60 + 28 = 100, \quad d = 100.$$

Torej enačba ravnine je

$$6x + 12y + 7z = 100.$$

22. Dani sta ravnina

$$\Pi : x - 3y + 2z - 6 = 0,$$

in premica

$$p : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}.$$

Ugotovi ali se premica  $p$  in ravnina  $\Pi$  sekata. V primeru pritrdilnega odgovora poišči presečišče.

**Rešitev:** Naj bo  $\vec{v}_p$  smerni vektor premice  $p$  in  $\vec{n}_\Pi$  normala ravnine  $\Pi$ . Premica  $p$  in ravnina  $\Pi$  se sekata v točki, če je  $\vec{v}_p \cdot \vec{n} \neq 0$ .

$$\vec{v}_p \cdot \vec{n} = (2, -1, 3) \cdot (1, -3, 2) = 2 + 3 + 6 = 11 \neq 0.$$

Torej se premica  $p$  in ravnina  $\Pi$  sekata v točki. Poiščimo presečišče. Parametričen zapis premice  $p$  je naslednji

$$x = -1 + 2t, \quad y = -t, \quad z = 2 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(-1 + 2t) - 3(-t) + 2(2 + 3t) - 6 = 0,$$

$$-1 + 2t + 3t + 4 + 6t - 6 = 0,$$

$$t = \frac{3}{11}.$$

Presečišče je

$$\begin{aligned}x &= -1 + 2\frac{3}{11} = -\frac{5}{11}, \\y &= -\frac{3}{11}, \\z &= 2 + 3\frac{3}{11} = \frac{31}{11}.\end{aligned}$$

Presečišče je

$$T_p\left(-\frac{5}{11}, -\frac{3}{11}, \frac{31}{11}\right).$$

23. Dani sta premica

$$p: \quad x = 1 + t, \quad y = 1 - t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

in ravnina

$$\Pi: \quad x + y = 2.$$

Ugotovi ali sta premica  $p$  in ravnina  $\Pi$  vzporedni in v primeru pritr-dilnega odgovora ugotovi, ali premica  $p$  leži v ravnini  $\Pi$ .

**Rešitev:** Naj bo  $\vec{v}_p$  smerni vektor premice  $p$  in  $\vec{n}_\Pi$  normala ravnine  $\Pi$ .  $\vec{v}_p = (1, -1, 1)$  in  $\vec{n}_\Pi = (1, 1, 0)$ .

$$\vec{v}_p \cdot \vec{n}_\Pi = (1, -1, 1) \cdot (1, 1, 0) = 0.$$

Torej premica  $p$  in ravnina  $\Pi$  sta vzporedni. Točka  $(1, 1, 0)$  leži na premici  $p$  in ravnini  $\Pi$ , torej premica  $p$  leži v ravnini  $\Pi$ .

24. Dani sta ravnini

$$\begin{aligned}Pi_1 &: \quad x + 2y - 3z = 4, \\Pi_2 &: \quad 2x + 4y - 6z = 3.\end{aligned}$$

Ugotovi ali sta ravnini vzporedni.

**Rešitev:** Naj bosta  $\vec{n}_{\Pi_1}$ ,  $\vec{n}_{\Pi_2}$  normali ravnin  $\Pi_1$  in  $\Pi_2$ . Normali  $\vec{n}_{\Pi_1}$  in  $\vec{n}_{\Pi_2}$  sta vzporedni, saj velja  $\vec{n}_{\Pi_1} \times \vec{n}_{\Pi_2} = (0, 0, 0)$ , ( $\vec{n}_{\Pi_2} = 2\vec{n}_{\Pi_1}$ ).

25. Dani sta ravnini

$$\begin{aligned}\Pi_1 &: \quad x + y + z = 1, \\Pi_2 &: \quad x - 2y + 3z = 1.\end{aligned}$$

Ugotovi ali se ravnini sekata in v primeru pritrdilnega odgovora poišči njuno presečišče.

**Rešitev:** Naj bosta  $\vec{n}_{\Pi_1} = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{n}_{\Pi_2} = (1, -2, 3)$  normalni ravnin  $\Pi_1$  in  $\Pi_2$ . Normalni ravnin  $(1, 1, 1)$  in  $(1, -2, 3)$  nista vzporedna vektorja, torej se ravnini sekata in presečišče je premica  $p$ . Poiščimo enačbo premice  $p$ . Smerni vektor premice je

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{n}_{\Pi_1} \times \vec{n}_{\Pi_2} \\ &= (1, 1, 1) \times (1, -2, 3) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (5, -2, -3). \end{aligned}$$

Poiščimo še eno točko, ki leži na obeh ravninah. Č v enačbi

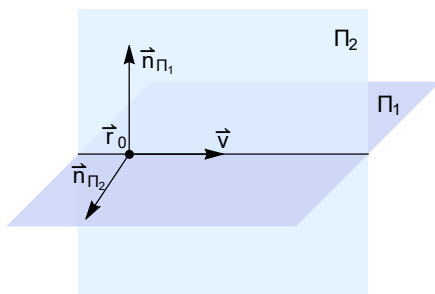
$$x + y + z = 1,$$

izberemo  $z = 0$ , dobimo  $x + y = 1$ . Vstavimo  $z = 0$  še v enačbo ravnine  $\Pi_2$  in dobimo

$$x - 2y + 3 \cdot 0 = 1,$$

od koder sledi  $x = 1$ ,  $y = 0$ . Torej  $T_0(1, 0, 0)$  leži v obeh ravninah. Enačba premice  $p$  je

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + t(5, -2, -3), \quad t \in \mathbb{R}.$$



26. Poišči razdaljo točke  $T(-2, 1, 3)$  do premice

$$p: \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{2}, \quad z = 4.$$

**Rešitev:** 1. način rešitve:

Izberimo poljubno točko  $A$ , ki leži na premici  $p$ . Razdalja točke  $T$  od premice  $p$  je

$$d(T, p) = \frac{|\overrightarrow{AT} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|},$$

kjer je  $\vec{v}$  smerni vektor premice  $p$ . Npr. lahko izberemo  $A = (-2, 0, 4)$ .

$$\vec{v} = (-1, 2, 0), \quad |\vec{v}| = \sqrt{5}.$$

$$\begin{aligned} d(T, p) &= \frac{|((-2, 1, 3) - (-2, 0, 4)) \times (-1, 2, 0)|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{|(0, 1, -1) \times (-1, 2, 0)|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{|(2, 1, 1)|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

2. način rešitve:

Naj bo  $\Pi$  ravnina, ki gre skozi točko  $T$  in je pravokotna na premico  $p$ . Naj bo točka  $T'$  presečišče premice  $p$  in ravnine  $\Pi$ . Poiščimo enačbo ravnine  $\Pi$ . Normala ravnine  $\vec{n}_{\Pi}$  je smerni vektor premice  $p$ , torej

$$\vec{n}_{\Pi} = (-1, 2, 0).$$

$$\Pi: -x + 2y + 0 \cdot z = d,$$

V to enačbo vstavimo koordinate točke  $T$  in določimo število  $d$ .

$$-(-2) + 2(1) = d,$$

$$\Pi: -x + 2y = 4.$$

Poiščimo še  $\Pi \cap p = T'$ . Zapišimo še premico  $p$  v parametrični obliki.

$$x = -2 - t, \quad y = 2t, \quad z = 4, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vstavimo koordinate premice  $p$  v enačbo ravnine  $\Pi$ .

$$-(-2 - t) + 2(2t) = 4,$$

$$2 + 5t = 0, \quad t = -\frac{2}{5}.$$

$$T' = \left(-2 - \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 4\right) = \left(-\frac{12}{5}, \frac{4}{5}, 4\right).$$

Razdalja točke  $T$  do premice  $p$  je

$$\begin{aligned} d(T, p) = d(T, T') &= d\left((-2, 1, 3), \left(-\frac{12}{5}, \frac{4}{5}, 4\right)\right) \\ &= \left|\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, -1\right)\right| \\ &= \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{1}{25} + 1} = \sqrt{\frac{6}{5}}. \end{aligned}$$

Opomba: točka  $T'$  je pravokotna projekcija točke  $T$  na premico  $p$ .

27. Dani sta točka  $T(-2, 1, 3)$  in premica

$$p: \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{2}, \quad z = 4.$$

Poišči pravokotno projekcijo točke  $T$  na premico  $p$  in poišči zrcalno točko točke  $T$  glede na premico  $p$ .

**Rešitev:** Naj bo  $\vec{v}$  smerni vektor premice  $p$ .

$$\vec{v} = (-1, 2, 0).$$

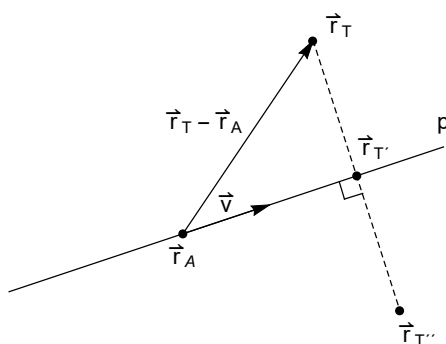
Izberimo poljubno točko  $A$ , ki leži na premici  $p$ . Izberimo na primer točko  $A(-2, 0, 4)$ .

Pravokotna projekcija točke  $T$  na premico označimo s  $T'$ . Naj bosta  $\vec{r}_A$  in  $\vec{r}_{T'}$  krajevna vektorja do točk  $A$  in  $T'$ .

$$\begin{aligned} \vec{r}_{T'} &= \vec{r}_A + \vec{r}_{AT'} \\ &= \vec{r}_A + \text{proj}_{\vec{v}} \vec{AT} \\ &= \vec{r}_A + \frac{(\vec{AT} \cdot \vec{v})}{|\vec{v}|} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \\ &= (-2, 0, 4) + \frac{((-2, 1, 3) - (-2, 0, 4)) \cdot (-1, 2, 0)}{5} (-1, 2, 0) \\ &= (-2, 0, 4) + \frac{2}{5} (-1, 2, 0) \\ &= \left(-\frac{12}{5}, \frac{4}{5}, 4\right). \end{aligned}$$

Naj bo  $T''$  zrcalna točka točke  $T$  glede na premico  $p$ .

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_{T''} &= \vec{r}_{T'} + \overrightarrow{TT'} \\
 &= \vec{r}_{T'} + \vec{r}_{T'} - \vec{r}_T \\
 &= 2\vec{r}_{T'} - \vec{r}_T \\
 &= 2\left(-\frac{12}{5}, \frac{4}{5}, 4\right) - (-2, 1, 3) \\
 &= \left(-\frac{14}{5}, \frac{3}{5}, 5\right).
 \end{aligned}$$



28. Dani sta točka  $T(\frac{1}{2}, 0, 0)$  in ravnina

$$\Pi : 5x + y - z - 1 = 0.$$

Izračunaj razdaljo točke  $T$  do ravnine  $\Pi$  in poišči zrcalno točko glede na ravnino  $\Pi$ .

**Rešitev:** Označimo z  $d(T, \Pi)$  razdaljo točke  $T$  do ravnine  $\Pi$ .

1. način izračuna razdalje  $d(T, \Pi)$ :

Naj bo  $p$  premica skozi točko  $T$ , ki je pravokotna na ravnino  $\Pi$ . Naj bo  $T_p$  prebodišče ravnine  $\Pi$  in premice  $p$ . Razdalja točke  $T$  do premice  $p$  je enaka razdalji med točkama  $T$  in  $T_p$ .

$$p : (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) + t(5, 1, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Poiščimo še koordinate točke  $T_p$ .

$$5\left(\frac{1}{2} + 5t\right) + t - (-t) - 1 = 0.$$

$$\frac{5}{2} + 25t + 2t - 1 = 0,$$



$$27t = 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}.$$

$$t = -\frac{3}{2 \cdot 27}.$$

Presečišče premice  $p$  in ravnine  $\Pi$  je

$$T_p \left( \frac{12}{54}, -\frac{3}{54}, \frac{3}{54} \right).$$

$$\begin{aligned} d(T, \Pi) = d(T, T_p) &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{12}{54}\right)^2 + \left(0 - \left(-\frac{3}{54}\right)\right)^2 + \left(0 - \frac{3}{54}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{15}{54}\right)^2 + \left(\frac{3}{54}\right)^2 + \left(\frac{3}{54}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{243}{(54)^2}} = \frac{9\sqrt{3}}{54} = \frac{\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

2. način izračuna razdalje  $d(T, \pi)$ :

Naj bo  $A$  poljubna točka na ravnini in naj bo  $\vec{n}_\Pi$  normala ravnine  $\Pi$ .

$$d(T, \pi) = \left| \frac{\vec{AT} \cdot \vec{n}_\Pi}{|\vec{n}_\Pi|} \right|.$$

Naj bo  $A = (0, 1, 0)$ .

$$\begin{aligned} d(T, \pi) &= \frac{|\vec{AT} \cdot \vec{n}_\Pi|}{|\vec{n}_\Pi|} \\ &= \frac{|(\frac{1}{2}, 0, 0) - (0, 1, 0) \cdot (5, 1, -1)|}{\sqrt{27}} \\ &= \frac{|(\frac{1}{2}, -1, 0) \cdot (5, 1, -1)|}{\sqrt{27}} \\ &= \frac{|\frac{5}{2} - 1|}{\sqrt{27}} \\ &= \frac{|\frac{3}{2}|}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

Označimo s  $T''$  zrcalno točko točke  $T$  glede na premico  $p$ . Poiščimo  $T''$ .

$$\begin{aligned} \vec{r}_{T''} &= 2\vec{r}_{T_p} - \vec{r}_T \\ &= 2 \left( \frac{12}{54}, -\frac{3}{54}, \frac{3}{54} \right) - \left( \frac{1}{2}, 0, 0 \right) \\ &= \left( -\frac{3}{54}, \frac{6}{54}, \frac{6}{54} \right). \end{aligned}$$

29. Dani sta premici

$$p_1: \quad x = 1 + t, \quad y = 2 + 3t, \quad z = 4 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$p_2: \quad x = 2s, \quad y = 3 + s, \quad z = -3 + 4s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Izračunaj razdaljo med njima.

**Rešitev:** Naj bosta  $\vec{v}_1$  in  $\vec{v}_2$  smerna vektorja premic  $p_1$  in  $p_2$ .

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (13, -6, -5).$$

Premici sta mimobežni. Izberimo točko  $A_1$ , npr.  $A_1 = (1, -2, 4)$ , na prvi premici  $p_1$  in točko  $A_2$ , npr.  $A_2 = (0, 3, -3)$ , na drugi premici.

$$\begin{aligned} d(p_1, p_2) &= \frac{|(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \overrightarrow{A_1 A_2}|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|} \\ &= \frac{(13, -6, 5)(-1, 5, 7)}{\sqrt{169 + 36 + 25}} \\ &= \frac{|-8|}{\sqrt{230}}. \end{aligned}$$

30. Poišči vsaj eno enačbo premice, ki je vzporedna z ravnino

$$\Pi: \quad x + 2y - 2z = 1$$

in je za 2 oddaljena od ravnine  $\Pi$ .

**Rešitev:** Poiščimo točko  $T_1$ , npr.  $T_1(1, 0, 0)$ , ki leži na ravnini  $\Pi$  in nato poiščimo točko  $T'$ , ki je za dva oddaljena od ravnine  $\Pi$ . Velja

$$\begin{aligned} \vec{r}_{T'} &= \vec{r}_{T_1} + 2 \frac{\vec{n}_\Pi}{|\vec{n}_\Pi|} \\ &= (1, 0, 0) + 2 \frac{(1, 2, -2)}{\sqrt{9}} \\ &= (1, 0, 0) + 2 \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right) \\ &= \left( \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3} \right). \end{aligned}$$

Za smerni vektor premice  $p$  lahko izberemo poljuben vektor v ravnini  $\Pi$ , npr.  $\overrightarrow{T_1 T_2}$ , kjer je  $T_2$  poljubna točka v ravnini  $\Pi$ , npr.  $T_2 =$

$(0, 0, -\frac{1}{2})$ . Enačba premice  $p$ , ki gre skozi točko  $T_1'$  s smernim vektorjem  $\vec{v} = \overrightarrow{T_1 T_2} = (-1, 0, -\frac{1}{2})$  je

$$p: \quad x = \frac{5}{3} - t, \quad y = \frac{4}{3}, \quad z = -\frac{4}{3} - \frac{1}{2}t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ker točki  $T_1$  in  $T_2$  lahko poljubno izbiramo, je premic  $p$ , ki so za dva oddaljene od ravnine  $\Pi$  in so vzporedne ravnini  $\Pi$ , neskončno.

31. Poišči parametrično enačbo premice  $p$ , ki gre skozi točko  $T(0, 1, 2)$  in je vzporedna ravnini

$$\Pi: \quad y + x + z = 2,$$

in je pravokotna na premico

$$q: \quad x = 1 + t, \quad y = 1 - t, \quad z = 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ali je premica  $p$  vsebovana v ravnini  $\Pi$ ?

**Rešitev:** Smerni vektor premice  $p$ , ki gre skozi točko  $T(0, 1, 2)$  in je vzporedna ravnini  $\Pi$  je lahko vsak vektor

$$v_p = \overrightarrow{T_1 T_2},$$

kjer sta  $T_1$  in  $T_2$  poljubni točki v ravnini  $\Pi$ . Smerni vektor premice  $p$  torej ni enolično določen.

Da bo premica  $p$  pravokotna na premico  $q$ , mora veljati

$$\vec{v}_p \cdot \vec{v}_q = 0.$$

Torej izbrati moramo dve taki točki  $T_1$  in  $T_2$  v ravnini  $\Pi$ , da bo veljalo

$$\overrightarrow{T_1 T_2} \cdot (1, -1, 2) = 0.$$

Izberimo to vcki  $T_1$   $T_2$  v ravnini  $\Pi$ . V ta namen iz enačbe ravnine  $\Pi$  izrazimo

$$x = 2 - y - z,$$

tedaj  $T(2 - y - z, y, z)$  leži v ravnini  $\Pi$ . Naj bo

$$T_1 = (2, 0, 0)$$

in določimo  $T_2(2 - y - z, y, z)$  tako, da bo

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{T_1 T_2} \cdot (1, -1, 2) \\ &= ((2 - y - z, y, z) - (2, 0, 0)) \cdot (1, -1, 2) \\ &= (-y - z, y, z)(1, -1, 2) \\ &= -y - z - y + 2z \\ &= -2y + z. \end{aligned}$$

Torej  $z = 2y$  in

$$T_2(2 - y - z, y, z) = ((2 - 3y, y, 2y), \quad y \in \mathbb{R}, y \neq 0$$

so možne točke, z zahtevanimi lastnostmi. Izberimo npr.  $y = 1$ , oziroma  $T_2(-1, 1, 2)$ . Tedaj  $\vec{v}_p = \overrightarrow{T_1 T_2} = (-3, 1, 2)$  in enačba premice  $p$  je

$$p: \quad (x, y, z) = (0, 1, 2) + s(-3, 1, 2), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Premica  $p$  ne leži v ravnini  $\Pi$ , saj točka  $T(0, 1, 2)$ , ki jo premica vsebuje ne leži v ravnini  $\Pi$ .

32. Poišči vse ravnine, ki so za dva oddaljene od ravnine

$$\Pi: \quad x + 2y - 2z = 1.$$

**Rešitev:** Izberimo točko  $T \in \Pi$ , npr.  $T(1, 0, 0)$ , in naj bo  $p$  premica, ki gre skozi točko  $T$  in je pravokotna na ravnino  $\Pi$ . Naj bosta  $T_1, T_2$ , ki ležita na premici  $p$  in sta za 2 oddaljeni od ravnine  $\Pi$ .

$$p: \quad (x, y, z) = (1, 0, 0) + t \frac{\vec{n}_\Pi}{|\vec{n}_\Pi|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Torej

$$\begin{aligned} \vec{r}_{T_1} &= (1, 0, 0) + 2 \frac{\vec{n}_\Pi}{|\vec{n}_\Pi|} = \left( \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3} \right), \\ \vec{r}_{T_2} &= (1, 0, 0) - 2 \frac{\vec{n}_\Pi}{|\vec{n}_\Pi|} = \left( \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right). \end{aligned}$$

Ravnina  $\Pi_1$ , ki gre skozi točko  $T_1$  in je vzporedna ravnini  $\Pi$  je naslednja

$$\Pi_1: \quad x + 2y - 2z = d_1,$$

$$\frac{5}{3} + 2 \frac{4}{3} - 2 \left( \frac{4}{3} \right) = d_1,$$

$$d_1 = \frac{21}{3}.$$

Torej

$$\Pi_1 : x + 2y - 2z = \frac{21}{3}.$$

Ravnina  $\Pi_2$ , ki gre skozi točko  $T_2$  in je vzporedna ravnini  $\Pi$  je naslednja

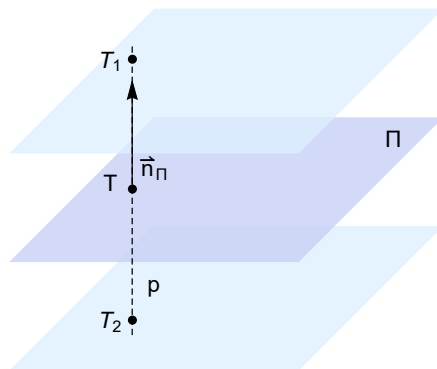
$$\Pi_2 : x + 2y - 2z = d_2,$$

$$\frac{1}{3} - 2\frac{4}{3} - 2\frac{4}{3} = d_2,$$

$$d_2 = -\frac{15}{3}.$$

$$\Pi_2 : x + 2y - 2z = -\frac{15}{3},$$

Ravnini  $\Pi_1$  in  $\Pi_2$  sta ravnini, ki sta za 2 oddaljeni od ravnine  $\Pi$ .



33. Dani sta premici

$$p : x = 1 + t, \quad y = 1 - t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$q : x = 1 - s, \quad y = 1 + 2s, \quad z = 2s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Poišči presečišče premic  $p$  in  $q$  in določi kot, ki ga premici  $p$  in  $q$  oklepata.

**Rešitev:** Določimo presečišče premic  $p$  in  $q$ . Izpolnjene morajo biti enačbe

$$1 + t = 1 - s, \quad 1 - t = 1 + 2s, \quad t = 2s,$$

od koder sledi  $t = -s$ ,  $t = -s = 0$ . Torej

$$p \cap q = \{(1, 0, 0)\}.$$

Kot  $\varphi$  je ostri kot med smernima vektorjema  $\vec{v}_p$  in  $\vec{v}_q$ . Kot  $\varphi$  med premicama zadošča enakosti

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|} = \frac{(1, -1, 1)(-1, 2, 2)}{\sqrt{3} \cdot 3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Upoštevali smo  $\vec{v}_p = (1, -1, 1)$ ,  $\vec{v}_q = (-1, 2, 2)$ ,  $|\vec{v}_p| = \sqrt{3}$  in  $|\vec{v}_q| = 3$ .

34. Poišči enačbo premice  $p$ , ki gre skozi točko  $T(0, 1, 2)$ , in je pravokotna na premico

$$q: \quad x = 1 + t, \quad y = 1 - t, \quad z = 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Rešitev:** Iščemo točko  $T_1 \in q$ , da bo vektor  $\overrightarrow{T_1T}$  pravokoten na premico  $q$ . Vektor  $\overrightarrow{T_1T}$  lahko vzamemo za smerni vektor premice  $p$ . Točka  $T_1(1 + t, 1 - t, 2t)$  za vsak  $t \in \mathbb{R}$  leži na premici  $q$ . Določimo število  $t$  tako, da bo

$$\overrightarrow{T_1T} \cdot \vec{v}_q = 0,$$

kjer je  $\vec{v}_q = (1, -1, 2)$  smerni vektor premice  $q$ . Torej poiščimo rešitve enačbe

$$0 = (-1-t, t, 2-2t)(1, -1, 2) = (-1-t) + t(-1) + (2-2t)2 = -1-t-t+4-4t = 3-6t,$$

$$t = \frac{1}{2}$$

in

$$T_1 \left( 1 + \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}, 2 \cdot \frac{1}{2} \right) = \left( \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right),$$

$$\overrightarrow{T_1T} = \left( -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right).$$

$$p: \quad (x, y, z) = (0, 1, 2) + t \left( -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

35. Dani sta ravnini

$$\Pi_1 : 10x + 2y - 2z = 5,$$

$$\Pi_2 : 5x + y - z = 1.$$

Izračunaj razdaljo med njima.

**Rešitev:** Normali ravnin sta  $\vec{n}_{\Pi_1} = (10, 2, -2)$  in  $\vec{n}_{\Pi_2} = (5, 1, -1)$ . Izberimo eno točko  $T$  na ravnini  $\Pi_1$  in razdalja  $d(\Pi_1, \Pi_2)$  med ravninama  $\Pi_1$  in  $\Pi_2$  je enaka razdalji točke  $T$  do ravnine  $\Pi_2$ . Izberimo npr.

$T = (\frac{1}{2}, 0, 0)$ . Izberimo še poljubno točko  $A$ , npr.  $A(1, 1, 5)$  na ravnini  $\Pi_2$ , tedaj je

$$\begin{aligned} d(T, \Pi_2) &= \frac{|\overrightarrow{AT} \cdot \vec{n}_{\Pi_2}|}{|\vec{n}_{\Pi_2}|} \\ &= \frac{|((\frac{1}{2}, 0, 0) - (1, 1, 5)) \cdot (5, 1, -1)|}{|(5, 1, -1)|} \\ &= \frac{|(-\frac{1}{2}, -1, -5) \cdot (5, 1, -1)|}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

36. Dani sta ravnini

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: 10x + 2y - 2z = 5, \\ \Pi_2 &: -5x - y + z = 1. \end{aligned}$$

Izračunaj kot med ravninama.

**Rešitev:** Normala ravnine  $\Pi_1$  je enaka  $\vec{n}_{\Pi_1} = (10, 2, -2)$  in normala ravnine  $\Pi_2$  je enaka  $\vec{n}_{\Pi_2} = (-5, -1, 1)$ . Ravnini sta vzporedni, saj velja  $\vec{n}_{\Pi_1} = -2\vec{n}_{\Pi_2}$  torej je kot med ravninama enak nič. (t. j. ostri kot med normalama je enak nič.)

37. Zapiši enačbo ravnine  $\Pi$ , ki gre skozi izhodišče in vsebuje vektorja  $(1, 0, 2)$  in  $(0, 2, 2)$ .

**Rešitev:** Za normalo iskane ravnine  $\Pi$  lahko vzamemo vsak neničelen večkratni vektorja

$$(1, 0, 2) \times (0, 2, 2) = (-4, -2, 2).$$

Torej enačba ravnine  $\Pi$  je

$$-4x - 2y + 2z = d,$$

kjer  $d$  določimo iz pogoja, da ravnina  $\Pi$  vsebuje točko  $(0, 0, 0)$ . torej

$$-4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 = d.$$

Iskana ravnina je

$$-4x - 2y + 2z = 0.$$

38. Dani sta premici

$$p : x = -1 - 2t, \quad y = 2 + 2t, \quad z = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$q : x = 2t, \quad y = 1 + t, \quad z = -6 - 2t.$$

Pokaži, da sta premici mimobežni in poišči enačbo ravnine  $\Pi$ , ki je enako oddaljena od premic  $p$  in  $q$ .

**Rešitev:** Označimo smerna vektorja premic  $p$  in  $q$  z  $\vec{v}_p$  in  $\vec{v}_q$ . Premici sta mimobežni, če  $\vec{v}_p \times \vec{v}_q \neq (0, 0, 0)$ . Izračunajmo

$$\vec{v}_p \times \vec{v}_q = (-2, 2, -1) \times (2, 1, -2) = (-3, -6, -6).$$

Ravnina  $\Pi$ , ki je enako oddaljena od premic  $p$  in  $q$  mora biti vzporedna obema premicama, njen normalni vektor pa je  $\vec{v}_p \times \vec{v}_q$ .

Naj bo  $\Pi_p$  ravnina, ki vsebuje premico  $p$  in je vzporedna ravnini  $\Pi$ . Naj bo  $\Pi_q$  ravnina, ki vsebuje premico  $q$  in je vzporedna ravnini  $\Pi$ . Razdalja ravnine  $\Pi$  do premice  $p$  je enaka razdalji ravnine  $\Pi$  do ravnine  $\Pi_p$ . Razdalja ravnine  $\Pi$  do premice  $q$  je enaka razdalji ravnine  $\Pi$  do ravnine  $\Pi_q$ . Enačbi ravnin  $\Pi_p$  in  $\Pi_q$  sta

$$\Pi_p : \quad -3x - 6y - 6z = -3(-1) - 6(2) - 6(1) = -12,$$

$$\Pi_q : \quad -3x - 6y - 6z = -3(0) - 6(1) - 6(-6) = 30.$$

Naj bo  $k$  premica, ki gre skozi točko  $(0, 1, -6)$  in je pravokotna na ravnino  $\Pi$ . Naj bo  $T_p$  presečišče premice  $k$  in ravnine  $\Pi_p$  in točka  $T_q$  presečišče premice  $k$  in ravnine  $\Pi_q$ . Velja, točka  $T_q$  ima koordinate  $T_q(0, 1, -6)$ .

Iskana ravnina  $\Pi$  gre skozi razpolovišče  $S$  daljice  $\overline{T_p T_q}$ .

Poiščimo  $T_p(x_p, y_p, z_p)$ .

$$k : \quad x = -3s, \quad y = 1 - 6s, \quad z = -6 - 6s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Vstavimo koordinate premice  $k$  v enačbo ravnine  $\Pi_p$ .

$$-3(-3s) - 6(1 - 6s) - 6(-6 - 6s) = -12 \iff s = -\frac{1}{9}.$$

$$\begin{aligned} (x_p, y_p, z_p) &= (0, 1, -6) + \left(-\frac{1}{9}\right) (-3, -6, -6) \\ &= \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{-16}{3}\right). \end{aligned}$$

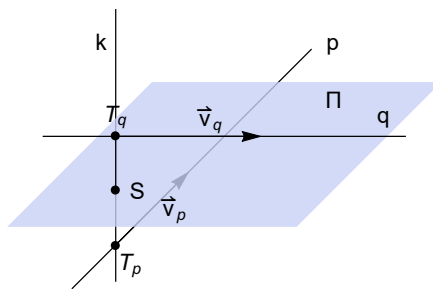


Poiščimo še presečišče  $S$ . Razpolovišče  $S$  daljice  $\overline{T_p T_q}$  ima koordinate  $S\left(-\frac{1}{6}, -\frac{2}{6}, \frac{10}{6}\right)$ .

Torej iskana enačba ravnine  $\Pi$ , ki gre skozi točko  $S$  in ima normalo  $(-3, -6, -6)$  je

$$\Pi : -3x - 6y - 6z = -3\left(-\frac{1}{6}\right) - 6\left(-\frac{2}{6}\right) - 6\left(\frac{10}{6}\right) = -\frac{45}{6},$$

$$\Pi : 6x + 12y + 12z = 15.$$



## 6 Matrike, determinante, sistemi linearnih enačb

1. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj produkt matrik  $AB$  in  $BA$  ter zapiši matrike  $A^T$ ,  $B^T$ ,  $(AB)^T$ ,  $B^T A^T$  ter  $B + 2A^T$ .

**Rešitev:**

$$AB = [3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 1 \cdot 4] = [19].$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 6 & 12 & 2 \\ 12 & 24 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B^T = [1 \quad 2 \quad 4], \quad (AB)^T = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 6 & 12 & 24 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$B^T A^T = (AB)^T,$$

$$B + 2A^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

2. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Zapiši matriki  $A^T$  in  $B^T$  in izračunaj matrike  $AB$ ,  $B^T A^T$ .

**Rešitev:**

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 12 & 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 12 \\ 4 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Zapiši  $A^T$ .

**Rešitev:**

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

4. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & -1 & -8 \end{bmatrix}.$$

Matriko  $A$  pretvori v zgornje stopničasto obliko.

**Rešitev:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & -1 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \\ \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. korak: od druge vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice, od tretje vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice in četrti vrstici prištejemo dvakratnik prve vrstice.

2. korak: drugo vrstico delimo s številom  $(-3)$  in tretjo vrstico delimo s številom  $(-2)$ .

3. korak: od četrte vrstice odštejemo tretjo vrstico in od tretje vrstice odštejemo drugo vrstico.

5. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -10 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matriko pretvori v zgornje stopničasto obliko in določi rang matrike.

**Rešitev:**

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -10 & 4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1. korak: od druge vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice in od tretje vrstice odštejemo prvo vrstico.

2. korak: tretji vrstici prištejemo drugo vrstico.

Rang matrike  $A$  je enak 2:

6. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriko pretvori v zgornje stopničasto obliko in določi rang matrike.

**Rešitev:**

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1. korak: zamenjamo prvo in drugo vrstico.

2. korak: drugi vrstici prištejemo dvakratnik prve vrstice in od tretje vrstice odštejemo prvo vrstico.

3. korak: tretji vrstici prištejemo drugo vrstico.

Rang matrike je enak 3. Pivoti so v prvem, drugem in četrtem stolpcu.

7. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matriko pretvori v zgornje stopničasto obliko in določi rang matrike.

**Rešitev:**

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1. korak: od druge vrstice odštejemo prvo vrstico, od tretje vrstice odštejemo trikratnik prve vrstice in od četrte vrstice odštejemo prvo vrstico.

2. korak: zamenjamo drugo in tretjo vrstico

3. korak: od četrte vrstice odštejemo drugo vrstico.

4. korak: četrta vrstica prištejemo tretjo vrstico.

Rang matrike je enak 3. Pivoti so v prvem, drugem in tretjem stolpcu.

8. Dan je sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - 2y + 3z &= 1. \end{aligned}$$

Poišči vse rešitve.

**Rešitev:**

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array} \right].$$

Pri tem smo od druge vrstice odšteli prvo vrstico. Neznanko  $z$  lahko prosto izbiramo. Sistem enačb se pretvori na sistem dveh enačb

$$-3y + 2z = 0,$$

$$x + y + z = 1.$$

Od tod dobimo

$$z = z, \quad y = \frac{2z}{3}, \quad x = 1 - y - z = 1 - \frac{5z}{3}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Rešitve:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

ali

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

9. Dan je sistem linearnih enačb.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

Poišči vse rešitve.

**Rešitev:** Zapišimo sistem z razširjeno matriko sistema

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right] &\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right] \sim \\ &\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

1. korak: zamenjamo prvo in drugo vrstico.
2. korak: drugi vrstici prištejemo dvakratnik prve vrstice in od tretje vrstice odštejemo prvo vrstico.
3. korak: tretji vrstici prištejemo drugo vrstico.

Sistem ni rešljiv.

10. Dan je sistem enačb

$$\begin{array}{rcl} -x & + & 3y & + & 2z & = & -2 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & & & = & b \end{array}$$

Ugotovi za katera števila  $b$  je sistem rešljiv. Za primere števil  $b$ , za katere je sistem rešljiv, poišči vse rešitve.

**Rešitev:**

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & b \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & b-4 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array} \right].$$

1. korak: tretji vrstici prištejemo dvakratnik prve vrstice.
2. korak: od tretje vrstice odštejemo štirikratnik druge vrstice.

Sistem ni rešljiv, če je  $b - 4 \neq 0$ .

V primeru  $b = 4$  je sistem rešljiv. Naj bo  $b = 4$ , poiščimo vse rešitve. V tretjem stolpcu ni pivota in tako lahko tretjo neznancko  $z$  prosto izbiramo. Sistem enačb je

$$\begin{array}{rcl} -x & + & 3y & + & 2z & = & -2 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

od koder dobimo

$$\begin{aligned} y &= -z, \\ x &= 2 + 3y + 2z = 2 - z. \end{aligned}$$

Torej imamo rešitev

$$\begin{aligned} x &= 2 - t, & y &= -t, & z &= t, & t &\in \mathbb{R}. \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 - t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, & t &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

11. Dane so tri ravnine

$$\begin{aligned}\Pi_1: & 2x + y + 3z = 1 \\ \Pi_2: & 3x + 3y - z = 5 \\ \Pi_3: & x - y + 7z = -3\end{aligned}$$

Pošči presečišče ravnin.

**Rešitev:** Poiskati je potrebno rešitev sistema linearnih enačb.

$$\begin{aligned}2x + y + 3z &= 1 \\ 3x + 3y - z &= 5 \\ x - y + 7z &= -3\end{aligned}$$

Poiščimo rešitve:

$$\begin{aligned}& \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 & -3 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 7 & -3 \\ 3 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & -11 & 7 \\ 0 & 3 & -11 & 7 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & -11 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].\end{aligned}$$

1. korak: od druge vrstice odštejemo trikratnik prve vrstice in od tretje vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice

2. korak: drugo vrstico delimo s številom 2.

Tretjo neznanke  $z$  lahko prosto izbiramo. Sistem enačb smo pretvorili v naslednji enostavnejši sistem enačb.

$$\begin{aligned}1x - y + 7z &= -3 \\ 3y - 11z &= 7\end{aligned}$$

Iz druge enačbe izrazimo neznanke  $y$  in jo vstavimo v prvo enačbo. Dobimo

$$y = \frac{7}{3} + \frac{11}{3}z, \quad x = -\frac{2}{3} - \frac{10}{3}z, \quad z = z, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Naj bo  $z = t$ , tedaj

$$(x, y, z) = \left( -\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, 0 \right) + t \left( -\frac{10}{3}, \frac{11}{3}, 1 \right).$$

Presečišče ravnin je torej premica.



12. Dan je sistem linearnih enačb.

$$\begin{aligned} 2x + 4y - z &= 1 \\ -x + 8y + 3z &= 2 \\ 2x &\quad - z = 1 \end{aligned}$$

Poišči vse rešitve.

**Rešitev:**

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 8 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] &\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & 20 & 5 & 5 \\ 0 & 16 & 5 & 5 \end{array} \right] \sim \\ &\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 16 & 5 & 5 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

1. korak: zamenjamo prvo in drugo vrstico,
2. korak: drugi vrstici prištejemo prvo vrstico in tretji vrstici prištejemo dvakratnik prve vrstice,
3. korak: drugo vrstico delimo s številom 5,
4. korak: od tretje vrstice odštejemo štirikratnik druge vrstice.

Sistem smo pretvorili v naslednji sistem enačb.

$$\begin{aligned} -x + 8y + 3z &= 2 \\ 4y + z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Sistem je torej enolično rešljiv. Rešitev je  $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ .

13. Dan je sistem linearnih enačb.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Poišči vse rešitve.

**Rešitev:**

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim$$

$$\begin{aligned} & \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

1. korak: od druge vrstice odštejemo prvo vrstico, od tretje vrstice odštejemo trikratnik prve vrstice in od četrte vrstice odštejemo prvo vrstico.

2. korak: zamenjamo drugo in tretjo vrstico

3. korak: od četrte vrstice odštejemo drugo vrstico.

4. korak: četrti vrstici prištejemo tretjo vrstico.

Sistem smo prevedli v naslednji sistem enačb.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ -x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ -x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Četrto neznanko  $x_4$  lahko prosto izbiramo.

$$x_3 = x_4, \quad x_2 = -x_3 + 2x_4, \quad x_1 = 2 - x_2 - x_3 + x_4.$$

Pišimo  $x_4 = t$ . Torej imamo rešitev:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 0, 0) + t(-1, 1, 1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

14. Dan je sistem linearnih enačb.

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 5 \\ 2x + 4y - z &= 4 \\ 2x + 4y &= 6 \\ -2x - 4y - z &= -8 \end{aligned}$$

Poišči vse rešitve.

**Rešitev:**

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & -1 & -8 \end{array} \right] &\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \sim \\ &\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

1. korak: od druge vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice, od tretje vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice in četrti vrstici prištejemo dvakratnik prve vrstice.

2. korak: drugo vrstico delimo s številom  $(-3)$  in tretjo vrstico delimo s številom  $(-2)$ .

3. korak: od 4. vrstice odštejemo trejo vrstico in od tretje vrstice odštejemo drugo vrstico.

Sistem enačb smo prevedli v ekvivalenten sistem enačb:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 5 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Drugo neznanko lahko prosto izbiramo. Torej

$$z = 2, \quad y = y, \quad x = 5 - 2y, \quad y \in \mathbb{R},$$

oziroma

$$(x, y, z) = (3, 0, 2) + t(-2, 1, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

15. Dan je sistem linearnih enačb.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Poišči vse rešitve.

**Rešitev:** Sistem linearnih enačb je homogen. Ena rešitev je trivialna rešitev. Poglejmo ali obstaja še kakšna netrivialna rešitev.

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

1. korak: zamenjamo prvo in drugo vrstico,
2. korak: od druge vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice in od tretje vrstice odštejemo prvo vrstico,
3. korak: od tretje vrstice odštejemo trikratnik druge vrstice.

Četrto spremenljivko  $x_4$  lahko prosto izbiramo. Sistem enačb smo prevedli v naslednji sistem enačb:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ -x_2 - x_4 &= 0 \\ -x_3 + 5x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Pišimo  $x_4 = t$ . Torej

$$\begin{aligned} x_3 &= 5x_4 = 5t, \\ x_2 &= -x_4 = -t, \\ x_1 &= 2x_4 - 2x_3 - x_2 = 2t - 10t + t = -7t. \end{aligned}$$

Rešitev je

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0) + t(-7, -1, 5, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

16. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Pretvori matriko  $A$  v vrstično kanonično formo.

**Rešitev:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

1. korak: od prve vrstice odštejemo dvakratnik tretje vrstice, 2. korak: od prve vrstice odštejemo drugo vrstico.

17. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

Pretvori matriko v vrstično kanonično formo.

**Rešitev:**

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 7 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & -6 \\ 3 & 3 & -1 & 10 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & -6 \\ 0 & 6 & -22 & 28 \\ 0 & 3 & -11 & 14 \end{bmatrix} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & -6 \\ 0 & 3 & -11 & 14 \\ 0 & 3 & -11 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & -6 \\ 0 & 3 & -11 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1. korak: zamenjamo prvo in drugo vrstico,
2. korak: od druge vrstice odštejemo trikratnik prve vrstice, od tretje vrstice odštejemo dvakartnik prve vrstice,
3. korak: drugo vrstico delimo s številom 2.
4. korak: drugo vrstico delimo s številom 3,
5. korak: prvi vrstici prištejemo drugo vrstico.

18. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

S pomočjo Gaussove metode poišči inverzno matriko  $A^{-1}$ .

**Rešitev:**

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim$$

$$\begin{aligned}
& \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right] \sim \\
& \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{13}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right] \sim \\
& \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{13}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right] \sim \\
& \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

1. korak: drugi vrstici prištejemo trikratnik prve vrstice, od tretje vrstice odštejemo prvo vrstico,
2. korak: od tretje vrstice odštejemo drugo vrstico,
3. korak: tretjo vrstico delimo s številom  $(-5)$ ,
4. korak: od druge vrstice odštejemo sedem kratnik tretje vrstice,
5. korak: od prve vrstice odštejemo dvakratnik tretje vrstice,
6. korak: drugo vrstico delimo s številom 2,
7. korak: od prve vrstice odštejemo drugo vrstico,
8. korak: prvo vrstico pomnožimo s številom  $(-1)$ .

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ -\frac{13}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -13 & -2 & 7 \\ 8 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

19. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

S pomočvjo Gaussovega postopka ugotovi, ali obstaja inverzna matrika  $A^{-1}$ ?

**Rešitev:**

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 7 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -22 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -11 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -11 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

1. korak: zamenjamo prvo in tretjo vrstic.
2. korak: od tretje vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice in od druge vrstice odštjemo trikratnik prve vrstice.
3. korak: drugo vrstico delimo s številom 2.
4. korak: od tretje vrstice odštejemo drugo vrstico.

Ker je na levi strani na diagonali ničla, inverzna matrika  $A^{-1}$  ne obstaja.

20. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko  $X$ , ki reši naslednjo matrično enačbo

$$AX - 2X = A + I.$$

**Rešitev:**

Da bi lahko na desni strani izpostavili matriko  $X$ , zapišemo matrično enačbo v obliki

$$AX - 2IX = A + I,$$

$$(A - 2I)X = A + I,$$

pomnožimo z leve z matriko  $(A - 2I)^{-1}$  in dobimo

$$(A - 2I)^{-1}(A - 2I)X = (A - 2I)^{-1}(A + I),$$

$$X = (A - 2I)^{-1}(A + I).$$

$$A + I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poiščimo matriko  $(A - 2I)^{-1}$ .

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{4}{6} \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{4}{6} \end{array} \right] \end{aligned}$$

1. korak: zamenjali smo prvo in tretjo vrstico,
2. korak: od druge vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice in tretji vrstici prištejemo dvakratnik prve vrstice,
3. korak: od tretje vrstice odštejemo drugo vrstico,
4. korak: od druge vrstice odštejemo šestkratnik tretje vrstice in prvi vrstici smo prišteli tretjo vrstico,
5. korak: tretjo vrstico smo delili s številom  $(-6)$ .

$$\begin{aligned} (A - 2I)^{-1} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 1 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{4}{6} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \\ X &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Determinante:** Determinanto  $D$  zapišemo

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

V primeru, ko  $n = 1$ , velja  $D = a_{11}$ . Naj bo  $n > 1$  in pišimo

$$k_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij},$$



kjer je  $D_{ij}$  poddeterminanta reda  $(n-1) \times (n-1)$ , ki jo dobimo tako, da v determinanti prečrtamo  $i$ -to vrstico in  $j$ -ti stolpec. Naj bo  $1 \leq i \leq n$ . Determinanto  $D$  izračunamo z razvojem po  $i$ -ti vrstici na naslednji način

$$D = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} D_{ij} = a_{ij}k_{ij}.$$

Naj bo  $1 \leq j \leq n$ . Determinanto  $D$  izračunamo z razvojem po  $j$ -tem stolpcu na naslednji način

$$D = \sum_{i=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} D_{ij} = a_{ij}k_{ij}.$$

Determinanto lahko računamo tudi s pomočjo Gaussovega postopka. Velja: Če v matriki večkratnik kake vrstice prištejemo k drugi vrstici, se determinanta matrike ne spremeni. Če zamenjamo dve vrstici, se determinanta pomnoži z  $(-1)$ . Če kako vrstico matrike  $A$  delimo (množimo) s številom  $\lambda$ , se determinanta matrike  $A$  deli (množi) z  $\lambda$ .

21. S pomočjo Gaussovega postopka izračunaj naslednje determinante.

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 6 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

(c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

**Rešitev:**

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 6 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 2(3)(-5) = -30.$$

1. korak: v drugi vrstici izpostavimo število 2
2. korak: od tretje vrstice odštejemo prvo vrstico

(b)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2)(1)(1)(-1) = 2. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 6 & -22 \\ 0 & 3 & -11 \end{vmatrix} = \\ &= -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & -11 \\ 0 & 3 & -11 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-2)1(3)(0) = 0. \end{aligned}$$

1. korak: zamenjamo prvo in tretjo vrstico
2. korak: od tretje vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice in od druge vrstice odštejemo trikratnik prve vrstice
3. korak: od tretje vrstice odštejemo drugo vrstico

22. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj  $\det A$  z

- (a) razvojem po prvi vrstici.
- (b) razvojem po 2. vrstici.

(c) razvojem po 3. stolpcu.

**Rešitev:**

(a)

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (4 \cdot 1 - 2 \cdot 1) + 2(-1) + 3(-4) = -12.$$

(b)

$$\det A = 0 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4(1 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - (1 \cdot 2 - 1 \cdot (-2)) + (1 \cdot 4 - 0) = -12.$$

(c)

$$\det A = 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 3(0 \cdot 4) - (2 - (-2)) + (4 - 0) = -12.$$

23. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Izračunaj  $\det A$  in inverzno matriko s pomočjo poddeterminant.

**Rešitev:**

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= 3((-1)3 - 2(-2)) + (-1)((-2)(-2) - (-3)(-1)) = \\ &= 3(-3 + 4) + (-1)(4 - 3) = 3 - 1 = 2. \end{aligned}$$

Pišimo  $k_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ , kjer je  $D_{ij}$  determinanta matrike, ki jo dobimo tako, da v matriki prečrtamo  $i$ -to vrstico in  $j$ -ti stolpec.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}^T.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -4 \\ 1 & 6 & -3 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Upoštevali smo

$$m_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad m_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -2, \quad m_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$m_{21} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad m_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6, \quad m_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$m_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1, \quad m_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6, \quad m_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

24. Dani so vektorji  $\vec{v}_1 = (1, 2, 1)$ ,  $(0, 2, 3)$  in  $(1, 5, -1)$ . Ali so vektorji  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  in  $\vec{v}_3$  linearno neodvisni?

**Rešitev:**

1. način: Vektorji  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  in  $\vec{v}_3$  so linearno neodvisni, če je

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Izračunajmo determinanto s pomočjo razvoja po 1. vrstici.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-2 - 15) + (6 - 2) = -13$$

2. način: Vektorji  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  in  $\vec{v}_3$  so linearno neodvisni, če ima homogen sistem

$$\begin{aligned} x &+ z &= 0 \\ 2x &+ 2y &+ 5z &= 0 \\ x &+ 3y &- z &= 0 \end{aligned}$$

samo trivialno rešitev, to je,  $(0, 0, 0)$  je edina rešitev sistema. To preverimo z Gaussovo metodo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

1. korak: od druge vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice in od tretje vrstice odštejemo prvo vrstico,
2. korak: drugo vrstico delimo s številom 2,
3. korak: od tretje vrstice odštejemo trikratnik druge vrstice.

Sistem ima rang 3 (so trije pivoti) in ima sistem enolično rešitev  $(0, 0, 0)$ .

25. Dani so vektorji  $\vec{v}_1 = (1, 2, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (0, 2, 3)$  in  $\vec{v}_3 = (1, 5, 1)$ . Izrazi vektor  $\vec{v} = (1, 1, 1)$  kot linearno kombinacijo vektorjev  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  in  $\vec{v}_3$ , to je, poišči števila  $\alpha$ ,  $\beta$  in  $\gamma$ , da bo veljalo

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{v}.$$

**Rešitev:**

Števila  $\alpha$ ,  $\beta$  in  $\gamma$  so rešitve sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Pivoti so trije in zato imamo enolično rešitev. Sistem smo prevedli v ekvivalenten sistem.

$$\begin{aligned} x + z &= 1 \\ y + \frac{3}{2}z &= -\frac{1}{2} \\ -\frac{13}{2}z &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Rešitev je

$$\gamma = -\frac{3}{13}, \quad \beta = \frac{4}{26}, \quad \alpha = \frac{16}{13}.$$

Torej

$$\frac{16}{13}\vec{v}_1 + \frac{4}{26}\vec{v}_2 - \frac{3}{13}\vec{v}_3 = \vec{v}.$$

Izračunaj determinanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

**Rešitev:**

Najprej bomo poenostavili determinano, npr. v prvi vrstici bomo s prištevanjem drugih vrstic poskušali napraviti čim več ničel.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 6 \cdot 7 = -22.$$

1. korak: tretjemu stolpcu prištejemo prvo vrstico in četrtemu stolpcu prištejemo prvi stolpec,
2. korak: determinanto smo razvili po prvi vrstici,
3. korak: drugemu stolpcu prištejemo prvi stolpec in tretjemu stolpcu prištejemo prvi stolpec,
4. korak: determinanto smo razvili po tretji vrstici.

26. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj determinanto matrike  $A$ .

**Rešitev:** Matrika je spodnje trikotna in je zato  $\det A$  enaka produktu diagonalnih členov.

$$\det A = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6.$$

## 7 Lastne vrednosti in lastni vektorji

1. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike  $A$ .

2. Število  $\lambda$  je lastna vrednost matrike  $A$ , če je  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -2 - \lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1 - \lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo  $\det(A - \lambda I)$ .

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1 - \lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} &= (-1) \begin{vmatrix} -1 & -2 & -\lambda \\ 2 & 1 - \lambda & -6 \\ -2 - \lambda & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 2 & 1 - \lambda & -6 \\ -2 - \lambda & 2 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 0 & -3 - \lambda & -6 - 2\lambda \\ 0 & 6 + 2\lambda & \lambda^2 + 2\lambda - 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & -6 - 2\lambda \\ 6 + 2\lambda & \lambda^2 + 2\lambda - 3 \end{vmatrix} = \\ &= (-3 - \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 3) - (6 + 2\lambda)(-6 - 2\lambda) = \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 = 0. \\ &= -(\lambda - 5)(\lambda + 3)^2 = 0. \end{aligned}$$

Lastne vrednosti so  $\lambda = 5$  večkratnosti 1 in  $\lambda = -3$  večkratnosti 2.

Poiščimo lastne vektorje, ki pripadajo lastni vrednosti  $\lambda = 5$ . t. j. vektorje  $\vec{v} \neq (0, 0, 0)$ , da velja  $(A - 5I)\vec{v} = (0, 0, 0)$ .  $vecv = (x, y, z)$ .

Rešujemo sistem linearnih enačb

$$(A - 5I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -2 - 5 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 - 5 & -6 & 0 \\ -1 & -2 & -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & -6 & 0 \\ -1 & -2 & -5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & -6 & 0 \\ -7 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -8 & -16 & 0 \\ 0 & 16 & 32 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. korak: tretjo vrstico pomnožimo z  $(-1)$  in nato zamenjamo tretjo in prvo vrstico.
2. korak: od druge vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice in tretji vrstici prištejemo sedemkratnik prve vrstice.
3. korak: drugo vrstico delimo s številom 8 in tretjo vrstico delimo s številom 16.

Sistem enačb smo prevedli v ekvivalenten sistem enačb

$$\begin{aligned} x + 2y + 5z &= 0 \\ y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Tretjo neznanko  $z$  lahko izberemo poljubno.

$$z = z, \quad y = -2z, \quad x = -t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Č pišemo  $z = t$ , lahko rešitev zapišemo

$$(x, y, z) = (-t, -2t, t) = t(-1, -2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lastni vektorji, ki pripadajo lastni vrednosti  $\lambda = 5$  torej so

$$\{t(-1, -2, 1), \quad t \in \mathbb{R}, \quad t \neq 0\}.$$

Poiščimo še lastne vektorje, ki pripadajo lastni vrednosti  $\lambda = -3$ .  $\vec{v} = (x, y, z)$  je lastni vektor, če velja

$$(A - (-3)I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rešimo ta sistem enačb.

$$\begin{bmatrix} -2+3 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1+3 & -6 & 0 \\ -1 & -2 & 0+3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tretji vrstici smo prišteli prvo vrstico in od druge vrstice smo odšteli dvakratnik prve vrstice.



Neznanki  $y$  in  $z$  lahko prosto izbiramo. Pišimo  $y = s$  in  $z = t$ . Tedaj je rešitev

$$y = s, \quad z = t, \quad x = -2s + 3t, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

oziroma rešitve sistema so

$$(x, y, z) = (3t - 2s, s, t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Lastni vektroji, ki pripadajo lastni vrednosti  $\lambda = -3$  so

$$\begin{aligned} & \{\vec{v} = (3t - 2s, s, t), \quad s, t \in \mathbb{R}, \vec{v} \neq (0, 0, 0)\} = \\ & = \{t(3, 0, 1) + s(-2, 1, 0), \quad s, t \in \mathbb{R}, \text{ nista oba hkrati enaka } 0\}. \end{aligned}$$

Ta množica ima dimenzijo 2, v njej lahko izberemo dva linearno neodvisna vektorja, npr. vektorja  $v_1 = (3, 0, 1)$  in  $v_2 = (-2, 1, 0)$ .

3. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike  $A$ .

**Rešitev:**

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 - \lambda \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda((2 - \lambda)(-\lambda)) + 3(-3(2 - \lambda)) = \\ &= (\lambda^2 - 9)(2 - \lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 3)(2 - \lambda). \end{aligned}$$

Lastne vrednosti torej so  $\lambda = 2$ ,  $\lambda = 3$  in  $\lambda = -3$ . Poiščimo lastne vektorje za lastno vrednost  $\lambda = 2$ : V tem primeru rešujemo sistem

$$(A - 2I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

1. korak: prvo vrstico delimo s številom  $(-2)$ .

2. korak: od tretje vrstice odštejemo trikratnik prve vrstice.

Drugo neznanko  $y$  lahko prosto izbiramo. Sistem enačb smo preoblikovali v ekvivalenten sistem

$$\begin{aligned} x - \frac{3}{2}z &= 0 \\ \frac{5}{2}z &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev sistem je

$$z = 0, \quad y = y, \quad x = \frac{3}{2}z = 0, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Pišimo  $y = t$ , tedaj rešitev zapišemo

$$(x, y, z) = (0, t, 0) = t(0, 1, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lastni vektorji, ki pripadajo lastni vrednosti  $\lambda = 2$  torej so

$$\{t(0, 1, 0), \quad t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}.$$

Ta množica ima dimenzijo enako 1. Poiščimo lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti  $\lambda = 3$ .

$$(A - 3I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tretji vrstici prištejemo prvo vrstico.

Tretjo neznanko  $z$  lahko prosto izbiramo.

Sistem enačb smo preoblikovali v ekvivalenten sistem

$$\begin{array}{rcl} -3x & + & 3z = 0 \\ & - & y = 0. \end{array}$$

Rešitev sistema je

$$z = z, \quad y = 0, \quad x = z, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Pišimo  $z = t$ , tedaj rešitev zapišemo

$$(x, y, z) = (t, 0, t) = t(1, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lastni vektorji, ki pripadajo lastni vrednosti  $\lambda = 3$  torej so

$$\{t(1, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}.$$

Ta množica ima dimenzijo enako 1.

Poiščimo lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti  $\lambda = -3$ .

$$(A + 3I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Od tretje vrstice smo odšteli prvo vrstico.

Tretjo neznanko  $z$  lahko prosto izbiramo.

Sistem enačb smo preoblikovali v ekvivalenten sistem

$$\begin{array}{rcl} 3x & + & 3z = 0 \\ & & 5y = 0. \end{array}$$

Rešitev sistema je

$$z = z, \quad y = 0, \quad x = -z, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Pišimo  $z = t$ , tedaj rešitev zapišemo

$$(x, y, z) = (-t, 0, t) = t(-1, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lastni vektorji, ki pripadajo lastni vrednosti  $\lambda = 3$  torej so

$$\{t(1, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}.$$

Ta množica ima dimenzijo enako 1.

4. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje.

**Rešitev:**

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2.$$

Torej  $\lambda = 0$  je lastna vrednost večkratnosti 2.

Poiščimo lastne vektorje,, t. j. rešimo sistem

$$(A - 0I) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zamenjali smo prvo in drugo vrstico.

Prvo neznanke  $x$  lahko prosto izbiramo. Sistem smo poenostavili v ekvivalenten sistem:

$$y = 0.$$

Torej rešitev sistem je

$$(x, y) = (x, 0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pišimo  $x = t$ , tedaj imamo rešitev

$$(x, y) = t(1, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lastni vektorji so

$$\{t(1, 0), \quad t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}.$$

Množica lastnih vektorjev ima dimenzijo 1, torej nimamo dveh linearno neodvisnih vektorjev, ki pripadajo lastni vrednosti  $\lambda = 0$ .